

τῆς μαθηματικῆς Γλώσσης. Ἡ φιλοσοφία ποὺ ἐνυπάρχει σὲ μιὰ νέα μαθηματικὴ ἐπινόηση εἶναι φυσικὸ νὰ μὴν γίνεται κατανοητὴ ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν δημιουργό της, ἀλλὰ ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ προσπαθεῖ ἔπειτα νὰ διεισδύσῃ στὴν οὐσία της σύμφωνα μὲ τὴν ἰδική του σκοπιά. Ἔτσι, ἡ Φιλοσοφία μέσα στὰ Μαθηματικὰ γίνεται βαθύτερα κατανοητὴ ὅχι τόσον ἀπ' αὐτὸν τὸν ἐπινοητὴ μιᾶς μαθηματικῆς θεωρίας, ὅσο ἀπὸ τοὺς μαθηματικοὺς τῆς ἐπομένῃς γενεᾶς. Ὁ συγγραφεὺς τοῦ προκειμένου ἄρθρου διατυπώνει τὴν γνώμη, ὅτι ἡ φιλοσοφία τῆς μαθηματικῆς σκέψεως γιὰ τὴν ἐπομένη γενεὰ θὰ διαφέρει ἀπὸ τὴν σημερινή, ὅπως ἄλλωστε τὸ ἴδιο συνέβαινε καὶ στὸ παρελθόν. Ἐκεῖνο ποὺ ὁ συγγραφεὺς ἐπιδιώκει μὲ τὴν ἐκθεσὴ του, εἶναι κυρίως ἡ διαπραγμάτευση μερικῶν ἀρχῶν, ποὺ χαρακτηρίζουν τὴν μαθηματικὴ σκέψη τῆς ἐποχῆς του, κι αὐτὸ μὲ τὴν κατὰ τὸ δυνατόν ἀποφυγὴ εἰδικῶν τεχνικῶν ὁρῶν.

Ἡ καθολικὴ εἰκόνα ποὺ δίνει στὸν ἀναγνώστη ἡ μελέτη τοῦ πρώτου τόμου τῆς «Σύγχρονης Φιλοσοφίας», ἀναφορικὰ μὲ τὶς ἔρευνες γιὰ τὴν Λογικὴ καὶ τὴν θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν στὴν δεκαετία 1956-66, εἶναι πραγματικὰ ἀριστοτεχνικὴ καὶ πλήρης σὲ τρόπο, ὥστε νὰ εἶναι πέρα γιὰ πέρα δικαιολογημένος ὁ χαρακτηρισμὸς ποὺ διευτύσαμε στὴν ἀρχή, ὅτι τὸ ἔργον αὐτὸ ἀποτελεῖ ἓνα πολύτιμον ὄργανο καὶ ἓνα βοήθημα γιὰ καθένα ἐνδιαφερόμενο γιὰ τὶς νεώτερες προόδους στὴν Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν. Ἐξ ἄλλου τὸ ἔργον παρέχει, μαζὶ μὲ τὴν ἐνημέρωση, τὸ ἔδαφος καὶ τὴν δυνατότητα στὸν ἐρευνητὴ γιὰ τὴν περαιτέρω συνέχιση καὶ τὴν ἐπίλυση προβλημάτων ποὺ μέχρι σήμερα μένουν ἀναπάντητα. Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὴν χρησιμότητα, τὸ ἔργον δὲν παύει ν' ἀποτελεῖ προτίστως ἓνα σημαντικό ἀπολογισμὸ γιὰ τὴν δραστηριότητα τοῦ ἀνθρώπινου πνεύματος σ' ἓνα τομέα, ποὺ δίκαια τοποθετεῖται ὡς εἰσαγωγικὸς στὶς σύγχρονες τάσεις καὶ ἔρευνες τῆς Φιλοσοφίας.

Ἀθῆναι

Φίλων Βασιλείου,
τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν

Ν. Γ. Αὐγελῆς, *Ἡ ἔννοια τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας καὶ ἡ ἀπόδειξη τοῦ Goedel. Φιλοσοφικὲς συνέπειες*, Θεσσαλονίκη 1972, 72 σελ.

Μιὰ πολὺ ἐνδιαφέρουσα ἐργασία τοῦ διδάκτορος τῆς Φιλοσοφίας, καὶ τώρα ἐπικ. καθηγητοῦ στὸ Ἀριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης Ν. Αὐγελῆ, ἐκυκλοφόρησε τελευταῖα μὲ τὸν ἄνω τίτλο. Ἡ ἐργασία ἀναφέρεται στὸ περίφημο θεώρημα τοῦ Κ. Goedel, τοῦ ὁποίου ἓνα βασικὸ συμπέρασμα εἶναι ἡ πρόταση, ὅτι σὲ ἓνα λογικοαριθμητικὸ παραγωγικὸ σύστημα ὑπάρχουν πάντοτε ἔννοιες ποὺ δὲν ἔμπορουν νὰ ὀρισθοῦν καὶ προτάσεις ποὺ δὲν ἐπιδέχονται ἀπόδειξη, οὔτε γιὰ τὴν θέση τους οὔτε γιὰ τὴν ἄρνηση, μέσα στὸ ἴδιο τὸ σύστημα. Εἶναι γνωστὸν πόσον ἐπαναστατικὲς ὑπῆρξαν οἱ συνέπειες τοῦ θεωρήματος ἀναφορικὰ μὲ τὶς δοξασίες ποὺ κυριάρχησαν γιὰ χιλιετίες

καὶ πόσον ἐπιτακτικὴ παρουσιάσθηκε ἡ ἀνάγκη γιὰ τὴν πλήρη ἀναθεώρησίν τους. Μιὰ ἀπὸ τὶς δοξασίες αὐτὲς ἦταν καὶ ἡ σχετικὴ μὲ τὴν μαθηματικὴ ἀλήθεια, ποὺ ἤδη ἀπὸ τὴν ἐπινόηση τῶν λεγομένων μὴ Εὐκλείδειων Γεωμετριῶν εἶχε σοβαρὰ κλονισθῇ. Ἀκριβῶς τὶς συνέπειες αὐτὲς τοῦ θεωρήματος τοῦ Goedel ἐξετάζει ὁ συγγραφεὺς γενικώτερα καὶ γιὰ τὴν Φιλοσοφία. Στὴν μελέτη αὐτὴ προτάσσονται εἰσαγωγικῶς οἱ ἀπαραίτητες γνώσεις γιὰ τὴν κατανόηση αὐτῶν ποὺ ἀκολουθοῦν καὶ γίνεται ἡ διερεύνηση γιὰ τὸ πρόβλημα τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας καθὼς καὶ ἡ ἔρευνα γιὰ τὴν ἐπίδραση ποὺ εἶχε τὸ ἐν λόγῳ θεώρημα στὶς κυβερνητικὲς (ὕπολογιστικές) μηχανές.

Τὸ πρῶτο κεφάλαιο ἀναφέρεται στὴν ἀξιοματικὴ μέθοδο, ποὺ ὅπως εἶναι γνωστὸν πρωτοεφαρμόσθηκε συστηματικὰ στὰ *Στοιχεῖα* τοῦ Εὐκλείδου γιὰ τὴν διαπραγμάτευση τῆς Γεωμετρίας. Ἐκτοτε ἡ μέθοδος αὐτὴ ἀπετέλεσε τὸν ἰδεατὸ τρόπο γιὰ τὴν δόμηση κάθε παραγωγικῆς θεωρίας. Ὁ συγγραφεὺς μνημονεύει στὴν ἀρχὴ τὸ περίφημο αἴτημα (ἀξίωμα) τῶν παραλλήλων, ποὺ σὲ ἄλλα ἀρχαῖα χειρόγραφα φέρεται ὡς τὸ πέμπτο καὶ σὲ ἄλλα ὡς τὸ ἐνδέκατο. Τὸ αἴτημα αὐτό, σὲ διάκριση ἀπὸ τὰ ἄλλα προτασσόμενα, δὲν ἐφαίνετο τόσο ἀυτονόητο, κατὰ τὴν ἀντίληψη ποὺ εἶχαν τότε γιὰ τὰ ἀξιώματα, ἀλλ' ἐδινε τὴν ἐντύπωση μιᾶς ἀποδείξιμης προτάσεως. Ἡ ἀναγωγή τοῦ αἰτήματος τῶν παραλλήλων εἰς τὰ ἄλλα ἀξιώματα, ἀπετέλεσε, γιὰ ἓνα μακρὸ χρονικὸ διάστημα, τὸ ἀντικείμενο μιᾶς συνεχοῦς ἀλλὰ ἄκαρπης προσπάθειας. Μόλις στὸ τέλος τοῦ 18ου καὶ στὶς ἀρχὲς τοῦ 19ου αἰῶνος οἱ ἔρευνες τῶν μαθηματικῶν κατέδειξαν τὴν ἀνεξαρτησία τοῦ ἐν λόγῳ αἰτήματος ἀπὸ τὰ λοιπὰ, καὶ μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἀνοίξεν ὁ δρόμος γιὰ τὴν ἐπινόηση τῶν μὴ Εὐκλείδειων Γεωμετριῶν. Μιὰ πρὸ ἐπισταμένη μελέτη, ποὺ ἐγίνε στὸν αἰῶνα μας ἀπὸ τὸν D. Hilbert σχετικὰ μὲ τὴν ὅλη δομὴ τῆς Ἀξιοματικῆς, εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα μιὰ τελείως διάφορον ἀντίληψη γιὰ τὰ ἀξιώματα καὶ μιὰ ἄλλη κατεύθυνση, ποὺ ἔλαβε ἀπὸ τότε ἡ ἀξιοματικὴ μέθοδος. Βέβαια καὶ μὲ τὴν νέαν αὐτὴν ἐκδοχὴν ἐμφανίζονται διάφορα προβλήματα τῶν ὁποίων ἐπιτακτικὴ εἶναι ἡ ἐπίλυση καὶ τῶν ὁποίων τὰ πιὸ σημαντικὰ εἶναι ἡ «συμβιβαστότης», δηλαδή τὸ μὴ ἀντιφατικόν, καὶ ἡ «πληρότης» ἐνὸς συστήματος ἀξιωμάτων. Γιὰ τὸν σκοπὸ μιᾶς ἀπολύτου (ἀλλ' ὅχι σχετικῆς) ἀποκρίσεως στὰ ἐν λόγῳ προβλήματα εἰσῆχθησαν ἀπὸ τὸ ἓνα μέρος ἡ «τυποποίηση» κάθε μαθηματικῆς θεωρίας καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο τὰ «Μεταμαθηματικά», ἀλλιῶς ἡ «Θεωρία ἀποδείξεων». Ἀρχικὰ ὁ Hilbert ἐζήτησεν, ὅπως ἡ χρησιμοποιούμενη ἐπιχειρηματολογία στὴν Θεωρία τοῦ τῶν ἀποδείξεων εἶναι ἀποκλειστικὰ «πεπερασμένη» καὶ τοῦτο γιὰτὶ μόνον ἔτσι μᾶς ἐξασφαλίζεται μιὰ ἀναμφισβήτητη βεβαιότητα. Τὸ πρόγραμμά του ὅμως αὐτὸ δὲν ἠμπόρεσε νὰ ἀχθῇ στὸ ἐπιθυμητὸ πέρας, λόγῳ ἀκριβῶς τῶν ἀποτελεσμάτων στὰ ὁποῖα ἔφθασε στὸ μεταξὺ (1931) ὁ Goedel. Ἐτσι τὸ μεγαλεπήβολο σχέδιο τοῦ Hilbert, ὅπως ἀξιοματικοποίησιν ὁλόκληρην τὴν μαθηματικὴ ἐπιστήμην, τουλάχιστον προσωρινῶς, ἐναυάγησε. Πρέπει, παρὰ ταῦτα, νὰ σημειωθῇ ὅτι ὑπῆρξαν μαθηταὶ τοῦ Hilbert οἱ ὁποῖοι, παρὰ τὴν ἀνατροπὴν ποὺ ἀπειλήθηκε ἀπὸ τὸν Goedel, κατῳρθωσαν νὰ καταλήξουν σὲ ἀξιόλογα ἐξαγόμενα σχετικὰ μὲ τὴν ἀξιοματικὴ θεμελίωση ὀρισμένων μαθηματικῶν κλάδων μὲ τὴν ἐπέκταση τῆς «πεπερασμένης» θέσεως τοῦ διδασκάλου των.

Τὸ δεύτερο κεφάλαιο ἀφιερώνεται στὴν ἀπόδειξη τοῦ κυρίου θεωρήματος τοῦ Goedel, σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖον συμβιβαστότης καὶ πληρότης εἶναι

μεταξύ τους δύο αντιφατικές έννοιες. Έδω ο συγγραφεύς ακολουθεί, κατά την ίδια του όμολογία, την συλλογιστική πορεία που αναπτύσσεται στο γνωστό έργο των E. Nagel και J. R. Newman και που φέρει τον τίτλο *Goedel's Proof* (New York 1958). Προτάσσει την έρμηνεία των λεγομένων «αριθμών Goedel», που προκύπτουν από την αντιστοιχίση, με κατάλληλο τρόπο, φυσικών αριθμών (δηλ. άκεραίων και θετικών) στα σύμβολα, τους τύπους και τις αποδείξεις ενός τυποποιημένου συστήματος που περιέχει τους φυσικούς. Ο τρόπος αντιστοιχίσεως είναι τέτοιος, ώστε να ήμπορη κανείς ν' αποφανθῇ για κάθε φυσικό, αν είναι αριθμός Goedel, δηλαδή αν είναι εικόνα κατά την μνημονευθείσα αντιστοιχίση, και να εύρη το άρχέτυπό του στην περίπτωση που αυτό συμβαίνει. Στην συνέχεια ο συγγραφεύς προβαίνει στην «αριθμητικοποίηση» των Μεταμαθηματικών του συστήματος, πράγμα που σημαίνει ότι απεικονίζει τις μεταμαθηματικές προτάσεις στο σύστημα κατά τρόπο, ώστε οί μεταμαθηματικές παραστάσεις και οί σχέσεις τους να μεταβαίνουν, κατά την απεικόνιση, σε προτάσεις και σχέσεις μεταξύ των αριθμών Goedel που αντιστοιχούν στις μεταμαθηματικές εκείνες παραστάσεις και σχέσεις. Μορφώνει, έπειτα, κατάλληλον αριθμητικόν τύπον, που ν' αντιστοιχῇ στον μεταμαθηματικό ισχυρισμό, ότι «ο έν λόγω τύπος δέν είναι αποδείξιμος στο σύστημα». Με την παραδοχή, τότε, ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό αποδεικνύει τέλος, ότι ο μορφωθείς κατά τον τρόπον αυτόν τύπος δέν είναι αποδείξιμος, όπως δέν είναι αποδείξιμη και ή άρνησή του. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι το σύστημα δέν είναι πλήρες, όπως ισχυρίσθηκεν ο Goedel.

Τήν άμεση σχέση που έχει το προηγούμενο αποτέλεσμα με την έννοια της μαθηματικής αλήθειας εξετάζει ο συγγραφεύς στο τρίτο κεφάλαιο. Η εξέταση γίνεται κυρίως με την αναφορά στις απόψεις δύο συγχρόνων μαθηματικών Σχολών, της Λογικιστικής και της Φορμαλιστικής. Για τους Λογικιστάς τονίζει ο συγγραφεύς την «ρεαλιστική» (πλατωνική) τους θέση αναφορικά με την έξω από μās ύπαρξη κάθε μαθηματικής οντότητος, όπως και τις παραδοχές, ότι τα Μαθηματικά είναι μέρος της Λογικής και ότι οί μαθηματικές προτάσεις είναι «αληθείς», έφ' όσον συνάγονται παραγωγικώς από τα λογικά αξιώματα. Την ρεαλιστική, όμως, αυτή θέση των Λογικιστών εκκρόνισεν ή προηγηθείσα απόδειξη, σύμφωνα με την όποία τα Μαθηματικά δέν είναι μία «πλήρης» Θεωρία. Η άποψη, έπειτα, ότι τα Μαθηματικά ανάγονται στην Λογική, συνεπάγεται το «ένιαϊον» της μαθηματικής αλήθειας. Και πάλιν το θεώρημα Goedel κατέστησε αμφίβολη μιá τέτοια ένότητα. Για τους Φορμαλιστάς ο συγγραφεύς τονίζει, ότι ή μαθηματική αλήθεια δέν φαίνεται να διαφέρει από μιá «τυπική παραγωγή». Η άπόλυτη έννοια της αλήθειας ύπονοει την δυνατότητα της ένσωματώσεως όλων των μαθηματικών αληθειών σε ένα και το αυτό μη αντιφατικό σύστημα. Γνωρίζομε, παρά ταυτα, από την απόδειξη Goedel, ότι υπάρχουν πάντοτε φορμαλιστικές αλήθειες που δέν ένσωματώνονται σε ένα σύστημα. Αμφίβολη παρουσιάζεται, λοιπόν, και ή όρθότης της φορμαλιστικής θέσεως αναφορικά με τή φύση μιās άπόλυτης μαθηματικής αλήθειας. Οδηγεΐται, έτσι, κανείς στο συμπέρασμα, ότι τα μαθηματικά θεωρήματα δέν μās δίνουν παρά σ χ ε τ ι κ έ ς μόνον αλήθειες, με άλλες λέξεις, ότι άπόλυτη βεβαιότητα δέν ύπάρχει ούτε σ' αυτά τά, ως άσφαλή νομιζόμενα, Μαθηματικά. Ίσως είμεθα πολύ

μακρὰ ἀπὸ τὴν σύλληψη τῆς ἐννοίας μιᾶς ἀπόλυτης μαθηματικῆς ἀλήθειας κι αὐτό, βέβαια, ἂν πραγματικὰ ἔχωμε τὸ δικαίωμα νὰ ὁμιλοῦμε γιὰ μιὰ τέτοια, κατὰ τὰ φαινόμενα, τελείως οὐτοπικὴ ἐννοια.

Τὸ τέταρτο, τέλος, κεφάλαιο φέρει τὸν τίτλο «Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Goedel καὶ οἱ κυβερνητικὲς μηχανές». Σ' αὐτὸ ἐκτίθενται οἱ βαθύτεροι λόγοι γιὰ τοὺς ὁποίους ὁ ἀνθρώπινος νοῦς θὰ μένη πάντοτε κυρίαρχος ἐπάνω ἀπὸ ὁποιαδήποτε ὑπολογιστικὴ μηχανή. Εἶναι ἀλήθεια, ὅτι οἱ λεγόμενοι «ὑπολογισταί» ποὺ κατασκευάσθηκαν ὡς τώρα ἀπαντοῦν σὲ ἓνα πλῆθος ἀπὸ προβλήματα. Πρέπει, ὅμως, νὰ παρατηρηθῇ πὼς ἡ λειτουργία τους καθορίζεται ἀπὸ τὸν ἄνθρωπο· αὐτὸς ὑπαγορεύει στοὺς ὑπολογιστὰς τὸ «πρόγραμμα» τῆς λειτουργίας τους. Ἐφ' ὅσον, πάλιν, κατὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ Goedel, ὑπάρχουν σὲ κάθε τυπικὸ σύστημα ἀ ν α π ο κ ρ ί σ ι μ α προβλήματα, φυσικὸν εἶναι νὰ μὴ ἀναμένη κανεὶς τὴν κατασκευὴ ἐνὸς ὑπολογιστοῦ, ποὺ θὰ ἀπαντᾷ σὲ κάθε ἐρώτημα ποὺ θὰ τοῦ θέτωμε. Οὐτε ἄλλωστε εἶναι νοητό, ὅτι θὰ ὑπάρξῃ ποτὲ μηχανὴ ποὺ θὰ ἡμπορέσῃ ν' ἀντικαταστήσῃ τὸν ἀνθρώπινον ἐγκέφαλο.

Ἡ ἐργασία τοῦ κ. Αὐγελῆ εἶναι γραμμένη μὲ μεγάλη σαφήνεια σὲ τρόπο ὥστε τὸ κείμενο νὰ μὴ παρουσιάζῃ δυσκολία ἀκόμη καὶ γιὰ τὸν μὴ εἰδικό. Ἐξ ἄλλου ἡ ἐργασία διακρίνεται γενικὰ γιὰ τὴν ἀκριβολόγο διατύπωσίν της, πρᾶγμα ποὺ φανερώνει, μαζὶ μὲ μιὰ πλατεῖα φιλοσοφικὴ κατάρτιση, τὴν ἱκανότητα τοῦ συγγραφέως νὰ εἰσδύῃ μὲ εὐχέρεια σὲ προχωρημένα θέματα τῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Σὲ μερικὰ μόνον σημεία τοῦ κειμένου θὰ ἦταν ἴσως ἐπιθυμητὴ μιὰ ἀκριβέστερη διατύπωση. Ἔτσι, γιὰ τὸν ὅρισμό τῆς «αὐτοκατηγορικῆς ἐννοίας», ἀντὶ ἐκείνου ποὺ δίνεται στὴ σελ. 43 θὰ ἡμπορούσε νὰ γραφῇ πὼς δύο ἐννοίες, ποὺ ἄλλωστε ἡμποροῦν καὶ νὰ συμπίπτουν, εἶναι αὐτοκατηγορικές, ὅταν στὸν ὅρισμό καθενιάς ἀπὸ αὐτὲς ὑπεισέρχεται ἀναγκαστικὰ ἡ ἄλλη ἐννοια. Κατὰ μία λιγώτερο εὐρεία ἐννοια, ὡς αὐτοκατηγορικὸς ὅρισμός γιὰ ἓνα στοιχεῖο ποὺ ἀνήκει σὲ κάποιο σύνολο θεωρεῖται ἐκεῖνος στὸν ὁποῖον ὑπεισέρχεται αὐτὸ τὸ ἴδιο τὸ σύνολον· π.χ. στὴν γνωστὴ ἀντινομία τοῦ Richard, ὁ ὅρισμός μὲ πεπερασμένες λέξεις δεκαδικοῦ κλάσματος μὲ βάση τὸ σύνολον ὅλων τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ποὺ ὀρίζονται ἐπίσης μὲ πεπερασμένες λέξεις.

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον ἔχουν τέλος οἱ παρατηρήσεις τοῦ συγγραφέως ἀναφορικὰ μὲ τὴν μαθηματικὴ ἀλήθεια, ποὺ ἀποτελεῖ ἄλλωστε τὸ κεντρικὸ θέμα τῆς ἀξιόλογης αὐτῆς ἐργασίας.

Ἀθῆναι

Φίλων Βασιλείου,
τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν