

ΦΙΛΩΝ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ, τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ

1. Ἡ ἔννοια τοῦ σ υ ν ε χ ο ῦς ἔχει πρωταρχικὴ σημασία γιὰ τὴ Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸν ἡ διακρίβωση τῆς οὐσίας του, τόσο ἀπὸ μαθηματικὴ ὅσο καὶ ἀπὸ φιλοσοφικὴ ἄποψη, ἀπετέλεσεν ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα τὸ ἀντικείμενο τῆς προσπαθείας ἀλλὰ καὶ τῆς δοκιμασίας γιὰ ἓνα πλῆθος ἐρευνητῶν. Ἄν καὶ ἡ ἔννοια τοῦ συνεχοῦς φαίνεται ἀπὸ τὴν ἐποπτεία ἀρκετὰ σαφῆς καὶ ἀπλῆ, στὴν πραγματικότητα ὁ ἀκριβὴς καθορισμὸς τῆς, ἀπηλλαγμένους ἀπὸ ἐνορατικὰ στοιχεῖα, ἦταν πάντοτε δυσεπίλυτο πρόβλημα. Ὑπῆρξε ἐποχὴ, ποὺ ἡ ἔννοια αὐτὴ θεωρήθηκε ἀδύνατο νὰ ἀναλυθῇ σὲ ἀπλούστερες ἔννοιες. Ἀκόμη περισσότερα θεωρήθηκε πὼς δὲν ἔπρεπε νὰ καταλεχθῇ κἂν στὶς μαθηματικὲς ἢ στὶς λογικὲς ἔννοιες καὶ ὅτι ἔπρεπε νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς ἓνα εἶδος καθαρῶς δόγματος. Ἐξ ἄλλου, ἐπίστευσαν ἄλλοτε ὅτι ἡ ἐρευνα γιὰ τὴν ἀποκάλυψη τοῦ μυστηρίου ποὺ ἔκρυβε τὸ συνεχές ἦταν κατὰ τὸ μὴ ἐπιτρεπτό καὶ ὅτι γι' αὐτὸ ἡ σχετικὴ ἐρευνα ἔπρεπε νὰ καταδικασθῇ ὁλότελα¹. Γεγονὸς εἶναι πὼς καὶ σήμερα ἀκόμη τὸ συνεχές εἶναι μιὰ ἀπὸ τὶς πιὸ δύσκολες καὶ πιὸ δυσεξιχνίαστες ἔννοιες σ' ὅλα τὰ Μαθηματικά.

Πρῶτοι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐπέτυχαν νὰ π λ η σ ι ᾶ σ ο υ ν στὴ σύλληψη μιᾶς ἀριθμητικῆς ιδέας τοῦ γεωμετρικοῦ συνεχοῦς μὲ τὴν ἐπινόηση ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Τὴν θεωρία τῶν Ἑλλήνων κατῴρθωσαν νὰ συμπληρώσουν οἱ μαθηματικοὶ ὕστερα ἀπὸ δύο ὁλόκληρες χιλιετίες². Ὡστόσο ὅ,τι

1. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 5 (1883) καὶ A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, Wien 1928, 125.

2. Ἡ αὐστηρὴ δόμηση τοῦ ἀσυμμέτρου ἔγινε μὲ τὴν θεωρία τῶν Λόγων τοῦ μαθητοῦ τοῦ Πλάτωνος Εὐδόξου. Ἡ θεωρία αὐτὴ συμπληρώθηκε τὸ 1887 ἀπὸ τὸν R. Dedekind μὲ τὴν δημιουργία τῶν τ ο μ ῶ ν, οἱ ὁποῖες εἰσάγουν τὴν γ ε ν ι κ ῆ ἔννοια τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Στὴν συμπλήρωση αὐτὴ βασικὲς εἶναι οἱ ἔννοιες τῆς διατάξεως, τῆς πυκνότητος καὶ τοῦ μετρησίμου ἐνὸς συνόλου. Ἀπὸ τὶς δύο πρῶτες ὁρίζει ὁ Dedekind, μὲ βάση τὴν τομὴ, τὴν ἔννοια τῆς σ υ ν ε χ ε ί α ς. Διατεταγμένα καὶ μετρήσιμα σύνολα εἶναι ἐκεῖνα, ποὺ στὴν οὐσία θεώρησε ὁ Εὐδόξος ὡς βάση τῆς θεωρίας του. Ἀξίζει νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι ἡ διάκριση μεταξὺ πυκνοῦ καὶ συνεχοῦς γίνεται ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν Εὐκλείδη στὸ 10ο βιβλίο τῶν *Στοιχείων*. Λεπτομέρειες γιὰ τὴν δόμηση τοῦ γενικοῦ ἀσυμμέτρου σύμφωνα μὲ τὴν θεωρία τοῦ Εὐδόξου βλ. Φ. Βασιλείου, *Ἐπὶ τῆς οὐσίας τῶν Μαθηματικῶν*, Ἀθῆναι 1965.



ἐπέτυχαν τότε οἱ μαθηματικοὶ δὲν ἦταν τίποτε περισσότερο ἀπὸ μιὰ ἀπλὴ ἀπεικόνιση τοῦ γεωμετρικοῦ συνεχοῦς μέσα στὴν περιοχὴ τῶν ἀριθμῶν. Λίγο ἀργότερα—στὸ τελευταῖο τέταρτο τοῦ περασμένου αἰῶνος— μὲ τὴν δημιουργία τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων ἐγινε ἡ προσπάθεια γιὰ τὴν προσπέλαση τοῦ συνεχοῦς μὲ τὸ διακεκριμένο. Ἡ μέθοδος ποὺ ἐγκαινιάσθηκε μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν εἶχεν ὡς στόχο τὴν γεφύρωση τοῦ χάσματος ποὺ χωρίζει τὶς δύο αὐτὲς βασικὰ διαφορετικὲς ἔννοιες, δηλαδή τὴν ἔννοια τοῦ διακεκριμένου καὶ ἐκείνη τοῦ συνεχοῦς, χάσματος ποὺ δὲν διαφέρει οὐσιαστικὰ ἀπὸ ἐκεῖνο μεταξὺ τῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς Ἀριθμοθεωρίας. Διάφορες ἀπόψεις ἔχουν διατυπωθῇ ἀπὸ τότε ἀναφορικὰ μὲ τὴν πραγμάτωση τῆς γεφυρώσεως αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ ἓνα μέρος οἱ δυσκολίες ποὺ ἐνυπάρχουν στὴν ἴδια τὴν ἔννοια τοῦ συνόλου, ποὺ ἐγιναν καὶ ἀφορμὴ γιὰ τὴν ἐμφάνιση διαφόρων ἀντιφάσεων ἢ ἀντινομιῶν³, ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος οἱ σοβαρὲς ἀμφιβολίες γιὰ τὴ νομιμότητα τῶν μεθόδων, ποὺ σχετικὰ ἀκολουθήθηκαν, κατέστησαν τὴν γεφύρωση σὲ μεγάλο βαθμὸ προβληματική.

Ἐξ ἄλλου, ἡ ἀνάγκη γιὰ τὴν εἰσαγωγὴ στὴ Θεωρία τῶν Συνόλων νέων αἰτημάτων καθὼς καὶ ἡ ἀπὸ μέρους μερικῶν τροποποίηση αὐτῶν τῶν κανόνων τῆς Λογικῆς, ποὺ ἀκόμη καὶ ἐξ ἀρχῆς δὲν ἔτυχαν τῆς γενικῆς παραδοχῆς, ἔδωσαν ἀφορμὴ στὸ νὰ γεννηθοῦν ριζικὲς διαφωνίες μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν, διαφωνίες ποὺ καὶ σήμερὰ δὲν ἔχουν καθ' ὅλοκληρίαν κατασταλῇ. Ὅπως, ὅμως, συνέβη καὶ μὲ τόσα ἄλλα δυσεπίλυτα προβλήματα στὸ παρελθόν, ἔτσι καὶ τώρα οἱ διαφωνίες ποὺ ἀνεφύησαν ἀναφορικὰ μὲ τὴ φύση τοῦ συνεχοῦς ἔδωσαν μεγάλη ὥθηση γιὰ τὴν δημιουργία νέων ἐννοιῶν καὶ μεθόδων, σὲ τρόπο ὥστε νὰ πλουτισθοῦν τὰ Μαθηματικὰ περισσότερο ἴσως ἀπ' ὅ,τι θὰ συνέβαινε μὲ τὴν ἀπ' ἀρχῆς πλήρη καὶ ὀριστικὴ ἐπίλυση τοῦ προβλήματος.

2. Ἡ ἔννοια τοῦ συνεχοῦς ἐμφανίζεται κατὰ τὴν ἀρχαιότητα στὸν φιλόσοφο Παρμενίδη⁴. Ἡ συστηματικὴ χρῆση τῆς ὀφείλεται κυρίως στὸν

3. Ἡ ἐπινόηση τῶν ἀντινομιῶν προκάλεσε τὴν δυσπιστία τοῦ τότε μαθηματικοῦ κόσμου ἀναφορικὰ μὲ τὴν ὀρθότητα τοῦ παραδοσιακοῦ τρόπου τοῦ διαλογίζεσθαι στὴν Θεωρία τῶν Συνόλων. Ἀντὶ ὅμως νὰ ἐγκαταλειφθῇ ἡ νέα αὐτὴ θεωρία, συνέβη ἀκριβῶς τὸ ἀντίθετο, δηλαδή προκλήθηκε τὸ γενικὸ ἐνδιαφέρον καὶ ἡ ἀρχικὴ διστακτικότης μετεβλήθη σὲ ἀγῶνα δρόμου γιὰ τὴν ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας αὐτῆς.

4. Παρμενίδης, ἀπόσπ. 8,1-10 καὶ 22-25 (VS 1, 235, 2 ἐπ. καὶ 237, 2 ἐπ.): *Ἐξ ἐμέθεν ῥηθέντα. Μόνος δ' ἔτι μῦθος ὁδοῖο | λείπεται ὡς ἔστιν· ταύτη δ' ἐπὶ σήματ' ἔασι | πολλὰ μαλ', ὡς ἀγέννητον ἐὼν καὶ ἀνώλεθρόν ἔστιν· | ἔστι γὰρ οὐλομελὲς τε καὶ ἀτρεμὲς ἡδ' ἀτέλεστον· | οὐδὲ ποτ' ἦν οὐδ' ἔσται, ἐπεὶ νῦν ἔστιν ὁμοῦ πᾶν, | ἐν, σ υ ν ε χ ές· τίνα γὰρ γένναν διζήσεται αὐτοῦ; πῇ πόθεν αὐξηθέν; οὐδ' ἐκ μὴ ἐόντος ἐάσω | φάσθαι σ' οὐδὲ νοεῖν·*

μαθητὴ τοῦ Παρμενίδη, τὸν Ζήνωνα τὸν Ἐλεάτη (περ. 450 π.Χ.). Ἀπὸ τὰ ἀποσπάσματα τοῦ Ζήνωνος, ποὺ διεσώθησαν ἀπὸ μαρτυρίες τοῦ σχολιαστοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους Σιμπλικίου (ἀρχὲς τοῦ 6ου αἰῶνος μ.Χ.), ἐκεῖνο ποὺ εἶναι λιγώτερο γνωστό, ἀλλὰ γι' αὐτὸ δὲν εἶναι καὶ λιγώτερο φημισμένο, εἶναι τὸ ἀναφερόμενο στὰ π ο λ λ ά. Ἡ μεγάλη σημασία ποὺ ἀποδόθηκε στὸ ἀπόσπασμα αὐτὸ δικαιολογεῖται ἀπὸ τὴ στενὴ σχέση ποὺ τὸ συνδέει μὲ τὸ συνεχές. Μὲ ὅ,τι ἐκφράζει σ' αὐτὸ ὁ Ζήνων θέλει νὰ καταρρίψῃ τὸν ἰσχυρισμὸ γιὰ τὴ δυνατότητα διαιρέσεως τοῦ συνεχοῦς σὲ ἄ τ ο μ α χωρὶς καμμιά μεταξὺ τους συνοχή. Γνωρίζουμε, βέβαια, ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ συνεχοῦς ἐνυπάρχει, κατὰ μὴ ἐκπεφρασμένο τρόπο, καὶ σὲ ὅλα τὰ π α ρ ά δ ο ξ α τοῦ Ζήνωνος. Ὅμως, ἐκεῖνο ποὺ διακρίνει τὸ ὑπ' ὄψει ἀπόσπασμα ἀπὸ τὰ ἄλλα πρέπει ν' ἀποδοθῇ στὴν ἄμεση ἐφαρμογὴ του στὸ λεγόμενο γ ρ α μ μ ι κ ὸ σ υ ν ε χ έ ς, αὐτὸ ποὺ ἀποτελεῖ τὴν πιὸ ἀπλὴ μορφή ἐνὸς συνεχοῦς. Λέγει ὁ Ζήνων στὸ ἀπόσπασμα 1: *εἰ πολλά ἐστίν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρά τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι*⁵. Ἡ ὅχι καὶ τόσο σαφὴς αὐτὴ πρόταση ἐρμηνεύεται⁶, σὲ συνδυασμὸ καὶ μὲ ἄλλα ἀποσπάσματα τοῦ Ζήνωνος ποὺ ἀποτελοῦν ἐπιχειρήματα γιὰ τὴν ὑποστήριξη τοῦ ἰσχυρισμοῦ του, κατὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: Κάτι ποὺ ἔχει ἔκταση ἢμπορεῖ πρῶτα νὰ θεωρηθῇ συνιστάμενο ἀπὸ ἄ π ε ι ρ α μέρη. Πραγματικά, λέγει ὁ Ζήνων σὲ ἄλλο ἀπόσπασμα: *εἰ πολλά ἐστίν, ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστίν· αἰ γάρ ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄντων ἐστί, καὶ πάλιν ἐκείνων ἕτερα μεταξὺ· καὶ οὕτως ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστί*⁷.

Πρέπει ἐδῶ νὰ παρατηρηθῇ πῶς, ὅ,τι κάνει στὸ ἀπόσπασμα αὐτὸ ὁ Ζήνων εἶναι μιὰ καθαρὰ νοητικὴ διαίρεση—ἃς τὴν ποῦμε πρώτου εἶδους—ποὺ δὲν καταστρέφει τὴν συνοχὴ τῶν μερῶν τοῦ ὅλου καὶ ποὺ γιὰ τὸν λόγο αὐτὸν πρέπει νὰ τὴν διακρίνωμε ἀπὸ ἐκείνη τοῦ Παρμενίδη (διαίρεση δευτέρου εἶδους), αὐτὴν ποὺ πιὸ πάνω μνημονεύσαμε. Εἶναι φανερὸ πῶς μὲ τὴν κατάρριψη τῆς δυνατότητος γιὰ τὴ διαίρεση τοῦ πρώτου εἶδους, ποὺ ἐπιχειρεῖ ὁ Ζήνων, καταρρίπτεται καὶ ἐκείνη τοῦ δευτέρου εἶδους. Ὡστε ἐρμηνεύοντες τὸν ἀρχικὸ ἰσχυρισμὸ τοῦ Ζήνωνος, βλέπομε ὅτι εὐρισκόμεθα μπροστὰ σὲ δύο δυνατὲς περιπτώσεις:

Πρώτη περίπτωση· τὰ ἔσχατα, ἄπειρα τὸ πλῆθος, ἀδιαίρετα μέρη ποὺ φθάνομε μὲ τὴ γενόμενη διαίρεση, δὲν ἔχουν μέγεθος. Αὐτὸ ὅμως ἀποκλεί-

οὐ γὰρ φατὸν οὐδὲ νοητὸν | ἐστίν ὅπως οὐκ ἐστίν... καὶ ... οὐδὲ διαιρετὸν ἐστίν, ἐπεὶ πᾶν ἐστίν ὁμοῖον | οὐδέ τι τῇ μᾶλλον, τό κεν εἴργοι μιν συνέχεσθαι, | οὐδέ τι χειρότερον, πᾶν δ' ἔμπλεόν ἐστιν ἐόντος. | τῷ ξ υ ν ε χ έ ς πᾶν ἐστίν· ἐὸν γὰρ ἐόντι πελάζει.

5. VS 1, 255, 21 ἐπ.

6. H. D. P. Lee, *Zeno of Elea*, Amsterdam 1967 (1936), 19, 21.

7. Σιμπλίκιος, *Εἰς Φυσικὴν* 140, 31-34 Diels (VS 1, 258, 3-5).



εται κατά τὸν Ζήνωνα, ἐπειδὴ εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ' ἂν εἶη⁸. Ἐξ ἄλλου, εἰ γὰρ ἄλλω ὄντι προσγένοιτο, οὐδὲν ἂν μεῖζον ποιήσειεν· μεγέθους γὰρ μηδενὸς ὄντος, προσγενομένου δέ, οὐδὲν οἶόν τε εἰς μέγεθος ἐπιδοῦναι· καὶ οὕτως ἂν ἦδη τὸ προσγινόμενον οὐδὲν εἶη. Εἰ δὲ ἀπογινομένου τὸ ἕτερον μηδὲν ἔλαττόν ἐστι μηδὲ αὖ προσγινομένου αὐξήσεται, δῆλον ὅτι τὸ προσγεγόμενον οὐδὲν ἦν οὐδὲ τὸ ἀπογεγόμενον⁹. Δεύτερη περίπτωση· τὰ ἐν λόγῳ ἄτομα ἔχουν μέγεθος. Τότε ὁ Ζήνων συμπεραίνει ὅτι τὸ ἄθροισμα ἀπείρου πλήθους μεγεθῶν, ποὺ δὲν εἶναι μηδενικά, εἶναι ἄπειρον· εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχει αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἐτέρου. Καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος· καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἔξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. Ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν· οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ τοιοῦτον ἔσχατον ἔσται οὔτε ἕτερον πρὸς ἕτερον οὐκ ἔσται. Οὕτως εἰ πολλὰ ἐστίν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρὰ τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι¹⁰. Ἔτσι φθάνομε σὲ ἄτοπο, καὶ τὸ ἄτοπο αὐτὸ ἀποδεικνύει κατὰ τὸν Ζήνωνα τὸν ἰσχυρισμό του.

Οἱ Hasse καὶ Scholz¹¹ διασαφηνίζουν ἀκόμη περισσότερο τὸ ἀρχικὸ ἀπόσπασμα τοῦ Ζήνωνος, σχετίζοντάς το μὲ τὸ γραμμικὸ συνεχές καὶ παραφράζοντάς το μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο· «Ἄν εἶναι παραδεκτὸ νὰ θεωρήσωμε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα ὡς ἄθροισμα ἀπὸ ἀπείρων πολλὰ, ἀπείρως μικρὰ στοιχειώδη τμήματα (ἀπειροστά), τότε δύο καὶ μόνον περιπτώσεις εἶναι δυνατές. Ἡ τὰ στοιχειώδη ἐκεῖνα τμήματα ἔχουν ἓνα πεπερασμένο διάφορο ἀπὸ τὸ μηδὲν μέγεθος, περίπτωση κατὰ τὴν ὁποία καὶ τὸ συντιθέμενο ἀπὸ αὐτὰ τμήμα εἶναι ἀπείρως μεγάλο, γιατί ἓνα ἄθροισμα ἀπὸ ἀπείρως πολλὰ στοιχειώδη τμήματα μὲ πεπερασμένο τὸ καθένα μέγεθος ὑπερβαίνει κάθε πεπερασμένο τμήμα¹², ἢ τὰ ἐν λόγῳ στοιχειώδη τμήματα εἶναι μηδενικά, περίπτωση κατὰ τὴν ὁποία καὶ τὸ συνιστάμενο ἀπὸ αὐτὰ εἶναι μηδενικό»¹³. Παραδεχόμεθα φυσικά, πὼς τὰ στοιχειώδη τμήματα εἶναι ἴσα μεταξύ τους, ἀφοῦ, σὲ ἐναντία περίπτωση, ἓνα τέτοιο τμήμα ποὺ θὰ διαφέρει ἀπὸ ἄλλο καὶ θὰ εἶναι μεγαλύτερο (μικρότερο) ἐκείνου, κατ' ἀνάγκην θὰ τὸ περιλαμβάνῃ (θὰ περιλαμβάνεται σ' ἐκεῖνο), ἄρα δὲν θὰ ἦταν στοιχειῶδες, παρὰ τὴν παραδοχή μας.

8. Ὁ.π. 141, 1-2.

9. Ὁ.π. 139, 11-15.

10. Ὁ.π. 141, 2-8.

11. H. Hasse - H. Scholz, *Die Grundlagenkrise der Griechischen Mathematik*, Charlottenburg 1928, 11 (Ἑλλην. μτφρ. μὲ Πρόλ. Φ. Βασιλείου, «Δελτίον Ε.Μ.Ε.» 1934).

12. Πρόκειται γιὰ Ἀρχιμήδειο (ὀρθότερα Εὐδόξειο) σύστημα μεγεθῶν.

13. Βλ. καὶ παράγρ. 15.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι τὰ ἀναφερόμενα ἀποσπάσματα τοῦ Ζήνωνος φαίνεται νὰ εἶναι περισσότερο αὐθεντικά ἀπὸ ἄλλα ποὺ ἀναφέρονται στὰ παράδοξα τοῦ Ἑλεάτου καὶ ποὺ μνημονεύει ὁ Ἀριστοτέλης. Καὶ τοῦτο γιὰτὶ ὁ Σιμπλίκιος, στὴ μαρτυρία τοῦ ὁποίου τὰ ὀφείλομε, δηλώνει πὼς εἶναι κατὰ λέξιν ἀπόδοση κειμένου τοῦ Ζήνωνος.

3. Ἐνα ἀκόμη ἐπιχείρημα τοῦ Ζήνωνος ἀναφερόμενο στὰ πολλὰ, ποὺ περικλείει τὴν ἀντίφαση τοῦ μικρά τε καὶ μεγάλα, διεσώθη ἀπὸ τὸν Σιμπλίκιο¹⁴: Καὶ τί δεῖ πολλά λέγειν, ὅτε καὶ ἐν αὐτῷ φέρεται τῷ τοῦ Ζήνωνος συγγράμματι; πάλιν γὰρ δεικνύς, ὅτι εἰ πολλά ἐστὶ, τὰ αὐτὰ πεπερασμένα ἐστὶ καὶ ἄπειρα, γράφει ταῦτα κατὰ λέξιν ὁ Ζήνων· «εἰ πολλά ἐστὶν, ἀνάγκη τοσαῦτα εἶναι ὅσα ἐστὶ καὶ οὔτε πλείονα αὐτῶν οὔτε ἐλάττονα. Εἰ δὲ τοσαῦτά ἐστὶν ὅσα ἐστί, πεπερασμένα ἂν εἴη. Εἰ πολλά ἐστὶν, ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστίν...». Συναφές πρὸς τὸ παράδοξο τῶν πολλῶν εἶναι καὶ τὸ λεγόμενο τῆς διχοτομίας. Γιὰ τὸ παράδοξο αὐτὸ ἔχομε τὸ ἀκόλουθο χωρίο, ποὺ ὁ Πορφύριος ἀποδίδει στὸν Παρμενίδη, ἀλλ' ὁ Σιμπλίκιος παρατηρεῖ πὼς εἶναι πιθανώτερα τοῦ Ζήνωνος: ἕτερος δὲ ἦν λόγος τῷ Παρμενίδῃ ὁ διὰ τῆς διχοτομίας οἰόμενος δεικνύναι τὸ ὄν ἐν εἶναι μόνον καὶ τοῦτο ἀμερὲς καὶ ἀδιαίρετον· εἰ γὰρ εἴη, φησί, διαιρετόν, τετμήσθω δίχα, ...ὥς ἴτοι ὑπομενεῖ τινὰ ἔσχατα μεγέθη ἐλάχιστα καὶ ἄτομα, πλήθει δὲ ἄπειρα, καὶ τὸ ὅλον ἐξ ἐλαχίστων, πλήθει δὲ ἀπείρων συστήσεται... ἄπερ ἄτομα. Οὐκ ἄρα διαιρεθήσεται, ἀλλὰ μενεῖ ἐν· καὶ γὰρ δὴ εἴπει πάντη ὁμοίόν ἐστιν, εἴπερ διαιρετόν ὑπάρχει, πάντη ὁμοίως ἐστὶ διαιρετόν, ἀλλ' οὐ τῇ μὲν, τῇ δὲ οὐ. διηρήσθω δὴ πάντη· δῆλον οὖν πάλιν ὡς οὐδὲν ὑπομενεῖ, ἀλλ' ἐστὶ φροῦδον, καὶ εἴπερ συστήσεται, πάλιν ἐκ τοῦ μηδενὸς συστήσεται· εἰ γὰρ ὑπομενεῖ τι, οὐδέ πω γενήσεται πάντη διηρημένον. Ὡστε ἐκ τούτων φαιερὸν, φησί, ὡς ἀδιαίρετόν τε καὶ ἀμερὲς καὶ ἐν ἐστὶ τὸ ὄν¹⁵.

4. Κατὰ τὴν μαρτυρία τοῦ ἰδίου τοῦ Πλάτωνος, στὴν ἀρχὴ τοῦ διαλόγου *Παρμενίδης* (128 b), τὰ παράδοξα τὰ ἐπενόησεν ὁ Ζήνων γιὰ νὰ ὑποστηρίξη τὴν θεωρία τοῦ διδασκάλου του ἀναφορικὰ μὲ τὸ ἐνιαῖο τῆς πραγματικότητος ὡς ἀμετάβλητης καὶ ἀμετάκλητης ὀντότητος—θεωρία ποὺ ὁ Ζήνων μὲ πίστη καὶ ἀφοσίωση ἀκολούθησε σὲ ὅλη του τὴ ζωὴ. Ἐξ ἄλλου εἶναι φυσικὸ νὰ παραδεχθοῦμε ὅτι ὁ Ζήνων, ὅπως καὶ πολλοὶ μεταγενέστεροι φιλόσοφοι, ἠρνεῖτο νὰ παραδεχθῇ τὴ σύσταση μεγέθους, ποὺ ἔχει ἔκταση, ἀπὸ στοιχεῖα δίχως ἔκταση. Βέβαιον εἶναι πὼς ὅ,τι ἀπασχολοῦσε τὸν Παρμενίδη καὶ τὸν Ζήωνα δὲν ἦταν ἡ μαθηματικὴ ἀλλὰ ἡ φυσικὴ θεώρηση

14. Σιμπλίκιος, *Εἰς Φυσικὴν* 140, 27-32.

15. Ὁ.π. 139, 26 - 140, 6 καὶ Lee, *Zeno* 12.



τοῦ χώρου (καὶ τοῦ χρόνου). Ὅμως ἄς μὴ λησμονοῦμε, πὼς ἡ ἐνόραση τοῦ φυσικοῦ χώρου χρησίμευσε καὶ γιὰ τὴ δόμηση τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου. Σ' ἓνα πρότυπο μαθηματικῆς Γεωμετρίας ἐνυπάρχει πάντοτε ἡ ἰδέα τοῦ φυσικοῦ χώρου.

Ἡ ἐπιχειρηματολογία ποὺ ἀναφέραμε καὶ ποὺ ἀποτελεῖ ἓνα εἶδος πολεμικῆς τοῦ Ζήνωνος, στρέφεται κυρίως ἐναντίον ἐκείνων ποὺ ὑπεστήριζαν ὅτι ὁ χῶρος (καὶ ὁ χρόνος) συνίσταται ἀπὸ ἄτομα. Γιὰ τὸν Ζήωνα τὰ ἄτομα αὐτὰ θὰ πρέπει κατ' ἀνάγκην νὰ εἶναι ἄπειρα τὸ πλῆθος. Τοῦτο, ἀκριβῶς, εὐρίσκετο σὲ ἀντίθεση πρὸς τὴ διδασκαλία τοῦ Παρμενίδη γιὰ τὸ ἐνιαῖο τοῦ κόσμου. Ἀκόμη καὶ ἀπὸ τὴ μαρτυρία τοῦ Πλάτωνος, ποὺ ἀναφέραμε, προκύπτει ὅτι, πραγματικά, ὁ Ζήνων μὲ τὰ παράδοξά του ἤθελε νὰ κτυπήσῃ τοὺς πολυαρχικοὺς ποὺ ἔσκωπταν τὸν ἐνισμὸ τοῦ διδασκάλου του, δείχνοντας τὰ ἄτοπα, ὅπου ὠδηγοῦσαν οἱ δοξασίες ἐκείνων. Εἶναι ὅμως δύσκολο ν' ἀπαντήσῃ κανεὶς στὸ ἐρώτημα, ποιὸς ἄραγε ἐννοοῦσε ὁ Πλάτων μὲ τὸν χαρακτηρισμὸ πολυαρχικοί. Ἦσαν οἱ Πυθαγόρειοι, ποὺ ἀνήγαγαν τὰ πάντα στοὺς ἀριθμοὺς ἢ οἱ ὁπαδοὶ κάποιας ἄλλης φιλοσοφικῆς θέσεως μὲ παρόμοιες ἀτομιστικὲς τάσεις; Στὸ ἀναφερόμενο βιβλίο των, οἱ Hasse καὶ Scholz ἐκφράζουν τὴν εἰκασία πὼς πρόκειται γιὰ τοὺς Πυθαγορείους, ποὺ ἡ μεταφυσικὴ τους γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἐνεῖχε πολυαρχικὴ κοσμοθεωρία.

Εἶναι πολὺ ἐνδιαφέρον νὰ παρακολουθήσῃ κανεὶς τὴ διένεξη, ποὺ ἀνεφύη μεταξὺ τοῦ Ζήνωνος καὶ τοῦ Μελίσσου, παρὰ τὸ ὅτι καὶ οἱ δύο ἦσαν ὄχι μόνον μαθηταὶ τοῦ Παρμενίδη ἀλλὰ καὶ θερμοὶ ὑποστηρικταὶ τῶν δοξασιῶν τοῦ διδασκάλου. Ἡ διένεξη αὐτὴ εἶχε ὡς ἀφορμὴ τὴν χρῆση, στὴν ἐπιχειρηματολογία τοῦ Ζήνωνος, διαιρέσεων τοῦ ὄντος, πρᾶγμα ποὺ ὁ Μελίσσος κατεδίκαζε πλήρως, πιστεύοντας πὼς κάθε διαίρεση ἀντετίθετο στὴ θέση τῆς θεωρίας τοῦ Παρμενίδη. Ἀπ' ὅσα, ὅμως, ἐκθέσαμε στὰ προηγούμενα, βλέπομε ὅτι οἱ διαιρέσεις ποὺ χρησιμοποιοῦσε ὁ Ζήνων ἦσαν αὐτὲς ποὺ ἐκεῖ καλέσαμε τοῦ πρώτου εἶδους, ἐνῶ ἐκεῖνες στὸν Παρμενίδη ἦσαν τοῦ δευτέρου εἶδους. Κατὰ τὸν E. Beth¹⁶, φαίνεται πὼς ἡ διάσταση γνώμης μεταξὺ τῶν δύο μαθητῶν προῆλθε εἴτε ἀπὸ παράβλεψη τοῦ Μελίσσου, ποὺ συνέχεε τὰ δύο εἶδη διαιρέσεων, εἴτε ἀπὸ τὴ θέση πὼς καὶ ἡ ὑπόθεση ἀκόμη κάθε εἶδους διαιρέσεως στὰ ὄντα ἦταν ἀσυμβίβαστη πρὸς τὸ πνεῦμα τοῦ διδασκάλου των. Ἄς σημειωθῇ ἐδῶ ὅτι ὁ Πλάτων στὸν διάλογο *Θεαίτητος* ἀσπάζεται τὴ ἄποψη τοῦ Μελίσσου, ἐνῶ στοὺς διαλόγους *Παρμενίδης* καὶ *Σοφιστής* ὁ Ζήνων φέρεται ὡς ὁ ρήτωρ τοῦ διδασκάλου¹⁷.

16. E. Beth, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam 1968².

17. Ὁ.π. 7.

5. Ἀντίθετα πρὸς μία παλαιότερα ἐπικρατήσασα δοξασία, ὅτι δηλαδή τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος διακρίνει κάποια σοφιστική διάθεση¹⁸ καὶ ὅτι αὐτὰ δὲν εἶναι ἀπαλλαγμένα ἀπὸ στοιχειώδη λογικὰ καὶ μαθηματικὰ σφάλματα, σήμερα ὕστερα ἀπὸ μιὰ πιὸ ἐπισταμένη ἔρευνα κανεῖς πιά δὲν ἀμφιβάλλει γιὰ τὴν ὀξύνοια καὶ τὴ βαθύτητα σκέψεως ποὺ τὰ χαρακτηρίζουν, καθὼς καὶ γιὰ τὴν καρποφόρα ἐπίδραση ποὺ ἤσκησαν στὴ μαθηματικὴ ἔρευνα. Ὁ γνωστὸς σύγχρονος φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς Bertrand Russell (1872 - 1970) ἐκφράζεται γιὰ τὰ παράδοξα μὲ τὰ ἀκόλουθα¹⁹: «Τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος παρέχουν, κατὰ κάποιο τρόπο, ἔδαφος γιὰ ὅλες σχεδὸν τὶς θεωρίες γιὰ τὸν χῶρο, τὸν χρόνο καὶ τὸ ἄπειρο, ποὺ δημιουργήθηκαν ἀπὸ τὴν ἐποχὴ τοῦ μέχρι σήμερα». Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, στὴν ἐκδοση *Zeno's Paradoxes*, ποὺ ἀποτελεῖ μιὰ συλλογὴ τῶν πιὸ σημαντικῶν ἄρθρων ποὺ γράφηκαν στοὺς τελευταίους χρόνους ἐπάνω στὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος, ὁ ἐκδότης τοῦ W. Salmon λέγει στὴν Εἰσαγωγὴ²⁰: «Τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος τοῦ Ἑλεάτου εἶναι ἀντικείμενο ὁμορφιάς καὶ γοητείας καὶ πηγὴ γιὰ μιὰ ἐντονη πνευματικὴ ἔξαρση». Γεγονὸς εἶναι, πὼς τίποτε δὲν εἶχεν ἄλλοτε παραγνωρισθῇ σὲ τόσο μεγάλο βαθμό, ἀναφορικὰ μὲ τὴν κριτικὴ ἀξία καὶ τὴν ἐπιστημονικὴ γονιμότητά των, ὅσο τὰ παράδοξα αὐτὰ ποὺ, οὔτε λίγο οὔτε πολὺ, ἐξισώθηκαν μὲ καθαρὲς σοφιστεῖες. Θὰ ἀναφερθοῦμε καὶ πάλιν στὴν Εἰσαγωγὴ τοῦ τελευταίου αὐτοῦ βιβλίου²¹: «Ἄν καὶ λίγοι φιλόσοφοι νομίζουν ὅτι τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος ἀποδεικνύουν ἐγκῶς τὴν ἀνυπαρξία τῆς πολλότητος, τῆς κινήσεως καὶ τῆς μεταβολῆς, ὅμως ὁ ἀπόλυτος ἰδεαλισμὸς τοῦ δεκάτου ἐνάτου καὶ τῶν ἀρχῶν τοῦ εἰκοστοῦ αἰῶνος ἔχει μεγάλη ὁμοιότητα μὲ τὶς ἀπόψεις τοῦ Παρμενίδη, τόσο στὰ ἐπιχειρήματα ὅσο καὶ στὰ συμπεράσματα». Ἐξ ἄλλου ὁ F. H. Bradley,²² χωρὶς νὰ κάνῃ μνεῖα τοῦ Ζήνωνος, χρησιμοποιεῖ πέρα γιὰ πέρα ἑλεατικὰ ἐπιχειρήματα γιὰ νὰ ὑποστηρίξῃ ὅτι χῶρος καὶ χρόνος, κίνηση καὶ μεταβολή, εἶναι πράγματα ἀνύπαρκτα. Ὁ χῶρος, ὅπως ὁ χρόνος, ἀπεδείχθη καταφανῶς, πὼς δὲν εἶναι πραγματικοί, ἀλλ' ὅτι ἔχουν ἀντιφατικὴ ἐμφάνιση.

Σκοπὸς μας ἐδῶ δὲν εἶναι νὰ εἰσέλθουμε σὲ γενικὴ κριτικὴ τῆς ἐπιχειρηματολογίας τῶν Ἑλεατῶν, θεωρουμένης ἀπὸ μιὰ σύγχρονη μαθηματικὴ σκοπιά. Γιὰ μιὰ τέτοια κριτικὴ παραπέμπομε στὸ πιὸ σύγχρονο γιὰ τὸ θέμα αὐτό βιβλίο τοῦ Salmon, ποὺ μνημονεύσαμε. Θεωροῦμε, παρὰ ταῦτα, σκόπιμο νὰ τονίσουμε στὸ σημεῖο αὐτὸ πὼς μὲ τὴ σύγχρονη ἄποψη, ὅπου τὸ γραμμικὸ

18. Hasse - Scholz, ὁ.π. 13.

19. B. Russel, *The Problem of Infinity considered historically*.

20. W. C. Salmon (Ed.), *Zeno's Paradoxes*, New York 1970, 5.

21. Ὁ.π. 16.

22. Στὸ βιβλίο τοῦ *Appearance and Reality*, Oxford 1930, 36.

συνεχές συντίθεται από σημεία, και τή γενίκευση του μήκους ενός διαστήματος, που πραγματοποίησε ή νεώτερη Θεωρία του Μέτρου, αίρεται, από μαθηματική άποψη, πλήρως το επιχείρημα του Ζήνωνος πως στοιχεία με μηδενικό μέγεθος δεν ήμπορούν να συνθέσουν μέγεθος με έκταση. Άργότερα, στη παράγρ. 15, θα ιδούμε ότι το τελευταίο αυτό δεν συμβαίνει σε πλείστα σημειοσύνολα με μη «άπαριθμητό» πλήθος σημείων.

6. Τήν ουσία του συνεχούς χαρακτηρίζει και ένα απόσπασμα του τελευταίου Ίωνος φιλοσόφου, του Αναξαγόρα (500; - 428), που έχουμε από μαρτυρία του Σιμπλίκιου: οὔτε γὰρ τοῦ σμικροῦ ἐστὶ τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον αἰεὶ (τὸ γὰρ ἐὼν οὐκ ἔστι τὸ μὴ οὐκ εἶναι), ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου αἰεὶ ἐστὶ μείζον (ἀπόσπ. 3.).

Ἀντίθετα πρὸς τὴν ἄποψη πὺ ἐπικρατοῦσε γενικῶς στὸν δέκατο ἑνατο αἰῶνα, καὶ πὺ ἐξακολουθεῖ νὰ ἔχη ὁπαδούς, ὅτι δηλαδὴ τὸ συνεχὲς εἶναι μιὰ ὁ λ ὁ τ ἦ τ α ἀπὸ καθ' ἑαυτὰ ὑ π α ρ κ τ ἂ σημεία, ἔχομε καὶ τὴν ἄποψη ὅτι τὸ συνεχὲς δὲν συντίθεται ἀπὸ σημεία, ἀλλ' ἀπὸ μέρη, πὺ καθένα τους εἶναι καὶ αὐτὸ συνεχὲς. Σύμφωνα μὲ τὴν τελευταία αὐτὴ ἄποψη, ὁ χ ῶ ρ ο ς δὲν εἶναι μόνον πρὸς τὰ ἔξω ἄπειρος, ἀλλὰ καὶ σὲ κάθε θέση του εἶναι π ρ ὅ ς τ ἂ ἔ σ ω ἄπειρος σὲ τρόπο, ὥστε σὲ μιὰ ἄπειρη πρόβαση ὁ ἔ σ ω τ ε ρ ι κ ὅ ς ὁ ρ ί ζ ω ν νὰ μᾶς ἀποκαλύπτεται ὁλονὲν νέος, δίχως τέλος. Φαίνεται πως μιὰ παραπλήσια δοξασία μὲ αὐτὴν πὺ θὰ συναντήσωμε παρακάτω στὸν Ἀριστοτέλη καὶ κατὰ τὸν δέκατο ἑβδομο αἰῶνα στοὺς ἐπινοητὰς τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ, εἶχε τὴν πηγὴ της στὴν διδασκαλία τοῦ Αναξαγόρα. Ὡστόσο καὶ σήμερα, στὴν λεγομένη Ἐνορατικὴ Σχολὴ (μὲ τὶς ἀ κ ο λ ο υ θ ί ε ς ἐ λ ε ὕ θ ε ρ η ς ἐ κ λ ο γ ῆ ς) βλέπομε κυριαρχοῦσες ιδέες πὺ δὲν ἀπέχουν πολὺ ἀπὸ ἐκεῖνες τοῦ Αναξαγόρα καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους.

7. Καὶ ὁ Πλάτων συμμεριζόταν ἀρχικὰ τὴ δοξασία τοῦ ἐνιαίου τοῦ συνεχούς. Ὅπωςδὴποτε ἡ υἱοθέτηση ἀπὸ μέρους τοῦ Πλάτωνος τῆς διδασκαλίας τοῦ Παρμενίδη φαίνεται νὰ ἀπετέλεσε τὴν κατευθυντήρια γραμμὴ μόνον κατὰ τὰ πρῶτα στάδια τοῦ φιλοσοφικοῦ του ἔργου. Ὁ Πλάτων ἔδωκε καὶ μιὰ παραλλαγὴ γιὰ τὸ παράδοξο τῆς διχοτομίας τοῦ Ζήνωνος, σύμφωνα μὲ τὸ ὅποῖον ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα οὔτε ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ συνιστάμενο ἀπὸ τὰ σημεία του, ἀλλ' οὔτε ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὑφιστάμενο δίχως αὐτά. Ἡ δυνατότης διαιρέσεως ἑνὸς τέτοιου τμήματος χωρὶς τέλος, ὠδήγησε τὸν Πλάτωνα στὸ νὰ θεωρήσῃ τὸ ἄπειρον ὡς ἓνα συστατικὸ στοιχεῖο τοῦ συνεχούς. Τὴν πλατωνικὴ παραλλαγὴ ζητεῖ ὁ Σιμπλίκιος νὰ τὴν ἐκφράσῃ μὲ τὰ ἑξῆς: «Ἄν διχοτομήσῃ κανεῖς ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα, καὶ ὁποιοδὴποτε ἀπὸ τὰ δύο μέρη τὸ διχοτομήσῃ πάλιν,

καὶ ἂν προσθέσῃ (συνάψῃ) τὸ ἓνα ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς τελευταίας διαιρέσεως στὸ μὴ διαιρεθὲν μέρος καὶ συνεχίσῃ μὲ τὸ ἄλλο τὶς ἴδιες ἐργασίες διχοτομήσεως καὶ προσθήκης, εἰς τὸ ἄπειρον, τότε οὔτε μὲ τὶς διαδοχικὲς διχοτομήσεις θὰ φθάσῃ ποτὲ σὲ μὴ διαιρετὰ τμήματα οὔτε μὲ τὶς διαδοχικὲς προσθήκες θὰ συμπληρώσῃ ὁλόκληρο τὸ ἀρχικὸ τμήμα. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν λαμβάνουν χώραν στὸ γραμμικὸ συνεχὲς δύο ἄπειρες *προβάσεις*, ἡ εἰς τὸ ἄπειρον διχοτόμησις καὶ ἡ εἰς τὸ ἄπειρον προσέγγισις τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος»²³.

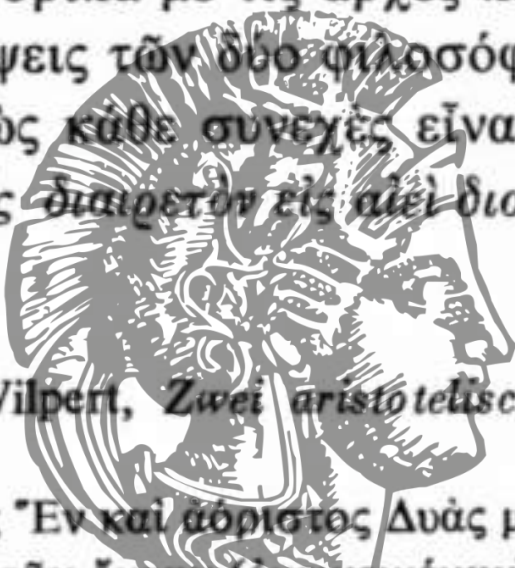
Φαίνεται ὅτι ὁ Πλάτων ἐζήτησε καὶ μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν νὰ εἰσαγάγῃ, γιὰ τὴν παραγωγή τοῦ συνεχοῦς καὶ γενικώτερα γιὰ τὴν παραγωγή τῶν ὄντων, μαζὶ μὲ τὴν ἀρχὴ τοῦ Ἐνός, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ σημεῖον, καὶ τὴν ἀρχὴ τῆς ἀορίστου Δυάδος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ «μέγα καὶ μικρόν»²⁴.

8. Ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι ὁ Ἀριστοτέλης δὲν συμφωνεῖ σὲ πλεῖστα σημεῖα μὲ τὴν θεωρία τοῦ Πλάτωνος ἀναφορικὰ μὲ τὶς ἀρχὲς καὶ τὴν εὔρεσή τους, δὲν πρέπει νὰ νομισθῇ, ὅτι οἱ ἀπόψεις τῶν δύο φιλοσόφων ἀποκλίνουν βασικά. Ὁ Ἀριστοτέλης δέχεται πὼς καθε συνεχὲς εἶναι ἐπ' ἄπειρον διαιρετό: *φανερὸν δὲ καὶ ὅτι πᾶν συνεχὲς διαιρετὸν εἰς αἰεὶ διαιρετά*²⁵. Ὡστόσο, ὁ

23. Σιμπλ. *Εἰς Φυσ.* 453, 36 ἐπ., P. Wilpert, *Zwei aristotelische Frühschriften*, Regensburg 1949, 179.

24. Ὁ Πλάτων ὁδηγεῖται στὶς ἀρχὲς Ἐν καὶ ἀόριστος Δυάς μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: Ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν διάκριση (διαίρεση) τῶν ὄντων (ἀντικειμένων) σὲ δύο τάξεις. Ἡ πρώτη τάξη περιέχει τὰ ὄντα καθ' ἑαυτὰ (ὅπως ἄνθρωπος) καὶ λέγεται τάξη τῶν ἀπολύτως νοουμένων ὄντων, σύντομα ἀπόλυτη τάξη. Ἡ δευτέρα περιέχει τὰ πρὸς τι ὄντα καὶ λέγεται σχετικὴ τάξη. Τὰ σχετικὰ ἀντικείμενα τὰ διακρίνει ὁ Πλάτων πάλιν στὰ μεταξὺ τῶν ἀντίθετα (ὅπως ἴσον - ἄνισον) καὶ στὰ ὑπὸ στενὴ ἔννοια σχετικὰ, ἀλλίως κυρίως σχετικὰ (ὅπως μέγα - μικρόν). Τὴν διάκριση αὐτὴ τὴν κάνει ὡς ἑξῆς: Στὰ ζεύγη ἀπὸ ἀντιθέτους ὅρους κάθε ὅρος γεννιέται μὲ τὴν καταστροφή τοῦ ἄλλου, ἐνῶ σ' ἓνα κυρίως σχετικὸ ζεῦγος οἱ ὅροι γεννιοῦνται ἢ καταστρέφονται μαζὶ. Πέρα ἀπ' αὐτὸ σὲ κάθε ζεῦγος ἀντιθέτων ὄρων, μόνον γιὰ τὸν ἓναν ὅρον δὲν εἶναι ἐπιτρεπτός ὁ χαρακτηρισμὸς «πιὸ πολὺ ἢ πιὸ λίγος», ἐνῶ ὁ χαρακτηρισμὸς αὐτὸς ἐπιτρέπεται καὶ γιὰ τοὺς δύο ὅρους σὲ ζεῦγος κυρίως σχετικῶν ὄρων. Ὁ Πλάτων ὀνομάζει ὠρισμένους τοὺς ὅρους γιὰ τοὺς ὁποίους δὲν ἐπιτρέπεται ὁ ἄνω χαρακτηρισμὸς, ἀορίστους ἐκείνους γιὰ τοὺς ὁποίους ἐπιτρέπεται, καὶ μορφώνει δύο ὁλότητες, τὴν μιὰ ἀπὸ τοὺς ὠρισμένους ὅρους, στοὺς ὁποίους συνυπολογίζει καὶ τοὺς ἀπολύτους, καὶ τὴν ἄλλη ἀπὸ τοὺς ἀορίστους ὅρους. Κατὰ τὸν Πλάτωνα ὑπάρχουν ἀπόλυτες ὀντότητες (*ιδέες*) ποὺ ἀντιστοιχοῦν καὶ στὶς δύο θεωρούμενες ὁλότητες. Ἡ ἀπόλυτη ὀντότητα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πρώτη ὁλότητα εἶναι τὸ Ἐν καὶ ἐκείνη ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν δευτέρη ὁλότητα εἶναι ἡ ἀόριστη Δυάς. (Σιμπλ. *Φυσ.* 247, 30 - 248, 15 καὶ E. Beth, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam 1968, 16).

25. Ἀριστοτέλης, *Φυσικὴ ἀκρόασις* Z 231b 15 - 16.



ἴδιος ἀπορρίπτει τὸ ὅτι μιὰ γραμμὴ ἤμπορεῖ νὰ διαιρεθῇ χωρὶς ὑπόλοιπο σὲ σημεῖα: ἀδύνατον ἐξ ἀδιαιρέτων εἶναι τι συνεχές, οἷον γραμμὴν ἐκ στιγμῶν, εἴπερ ἡ γραμμὴ μὲν συνεχές, ἡ στιγμὴ δὲ ἀδιαίρετον²⁶.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει τὸ κῦρος τοῦ Ἀριστοτέλους, ἤμπορεῖ κανεὶς νὰ πιθανολογήσῃ τὸν λόγον ποὺ ἡ σύγχρονη Θεωρία τῶν Συνόλων, τόσο κοντὰ στὸ ἑλληνικὸ πνεῦμα τῆς ἀρχαιότητος, δὲν ἀναπτύχθηκε στὴν ἐποχὴ τῶν Ἑλλήνων, οὔτε ἀκόμη καὶ στὶς δύο χιλιετίες ποὺ ἀκολούθησαν, στὶς ὁποῖες ἀδιαφιλονίκητα κυριαρχοῦσε ἡ μορφὴ τοῦ Ἀριστοτέλους. Οἱ μαθηματικὲς ἀντιλήψεις τοῦ Ἀριστοτέλους τὸν δείχνουν, κατὰ τὸν W. D. Ross²⁷, νὰ ἔχη πολὺ περισσότερη μαθηματικὴ εὐστροφία ἀπ' ὅ,τι κοινῶς πιστεύεται²⁸. Πρέπει νὰ τονισθῇ ὅτι ὁ Ἀριστοτέλης ἐπιχειρεῖ νὰ δώσῃ ὅρισμὸ τοῦ συνεχοῦς βασιζοντάς τον στοὺς ὅρους ἐφεξῆς, ἀπτόμενον ἢ ἐχόμενον, ἅμα, ἔν. Ἡ διατύπωση τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ, ποὺ ἀφορᾷ εἰς τὸ φυσικὸ συνεχές, ἔχει ὡς ἐξῆς: ἅμα μὲν οὖν λέγω ταῦτ' εἶναι κατὰ τόπον, ὅσα ἐν ἐνὶ τόπῳ ἐστὶ πρῶτον, χωρὶς δὲ ὅσα ἐν ἑτέρῳ, ἅπτεσθαι δὲ ὧν τὰ ἄκρα ἅμα (ἐπεὶ δὲ πᾶσα μεταβολὴ ἐν τοῖς ἀντικειμένοις, τὰ δὲ ἀντικείμενα τὰ τε ἐναντία καὶ τὰ κατὰ ἀντίφασιν, ἀντιφάσεως δ' οὐδὲν ἀνά μέσον, φανερόν ὅτι ἐν τοῖς ἐναντίοις ἔσται τὸ μεταξύ). . . ἐφεξῆς δὲ οὐ μετὰ τὴν ἀρχὴν ὄντος ἢ θέσει ἢ εἶδει ἢ ἄλλῳ τινὶ οὕτως ἀφορισθέντος, μηδὲν μεταξύ ἐστὶ τῶν ἐν ταύτῳ γένει. . . ἐχόμενον δὲ ὃ ἂν ἐφεξῆς ὦν ἀπῆται· τὸ δὲ συνεχές ἐστὶ μὲν ὅπερ ἐχόμενόν τι. . . καὶ ὥσπερ σημαίνει τὸ ὄνομα συνέχεται²⁹.

Ἐξ ἄλλου, εἰς τὸν Σιμπλίκιο συναντοῦμε τὸ ἐξῆς ὑπόμνημα: ὥσπερ

26. Z 231a 24 - 26.

27. W. D. Ross, *Aristotle's Physics*, Oxford 1936, 70.

28. Πρέπει νὰ τονισθῇ ὅτι γιὰ τὸν Ἀριστοτέλη, ὅπως καὶ γιὰ τὸν Ζήνωνα, τὸ συνεχές θεωρεῖται στὸν πραγματικὸ κόσμον. Εἶναι γνωστὸν, ὅτι γιὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἡ ἐσωτερικὴ δομὴ τοῦ πραγματικοῦ κόσμου βασιζέται σὲ ἀρχές ποὺ πρέπει νὰ ἐξαχθοῦν ἀπὸ τὸν ἴδιον τὸν κόσμον. Τὰ Μαθηματικὰ δὲν εἶναι πάντοτε τόση πιστὴ ἀπεικόνιση τῆς πραγματικότητος. Μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῆς τελευταίας εὐρίσκονται οἱ Φυσικὲς Ἐπιστῆμες. Σὲ ἀντίθεση μὲ τὴν ἀντίληψη αὐτὴ εὐρίσκεται ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποία ὁ κόσμος, σὲ κάποια ἀπὸ τίς θεωρήσεις του, προσαρμόζεται σὲ πλαίσιο ἀξιωματῶν ποὺ τὸν περιγράφουν κατὰ πεπλεγμένο τρόπο. Στὸ πλαίσιο αὐτὸ ἤμποροῦν ἐξ ἄλλου νὰ προσαρμοσθοῦν καὶ πολλοὶ ἄλλοι κόσμοι. Βλ. H. Freudenthal, *The implicit Philosophy of Mathematics today*, εἰς *Contemporary Philosophy* 1, Firenze 1972, 349.

29. Ὁ Ross ἀποδίδει τὸν ὅρισμὸ αὐτὸν ὡς ἐξῆς: Ἐνα ἀντικείμενον εἶναι ἐφεξῆς ἄλλου, ὅταν ἔπεται ἐκείνου σὲ κάποια ἀλληλουχία, χωρὶς νὰ ὑπάρχῃ τίποτε μεταξύ των τοῦ αὐτοῦ εἶδους. Δύο ἀντικείμενα εἶναι ἀπτόμενα ἢ ἐχόμενα ὅχι μόνον ὅταν δὲν ὑπάρχῃ κανένα ἄλλο τοῦ αὐτοῦ εἶδους μεταξύ των, ἀλλὰ καὶ ὅταν τὰ παρακείμενα ἄκρα τῶν δύο εἶναι ἅμα, δηλαδὴ δὲν ἔχουν τίποτε μεταξύ των. Ἐνα ἀντικείμενον εἶναι συνεχές, ὅταν τὰ συγκλίνοντα ἄκρα τῶν μερῶν του ὅχι μόνον εἶναι ἅμα ἀλλὰ ἔν. Βλ. καὶ τὴν μετάφραση τοῦ Κ. Γεωργούλη, *Ἀριστοτέλους Φυσικὴ ἀκρόασις*, Ἀθῆναι 1973, 150 (Φυσ. ἀκρ. E 226b 21 ἐπ.).

ἀπὸ τοῦ ἐφεξῆς καὶ τοῦ ἄπτεσθαι ἐγίνετο τὸ ἐχόμενον, οὕτως ἀπὸ τοῦ ἐχομένου τὸ συνεχές, ὅταν ἡ ἀφῆ τῶν ἐχομένων γένηται ἔνωσις· τοῦτο δὲ γίνεται, ὅταν τῶν ἀπτομένων τὰ πέρατα, δύο τέως ὄντα, συμφυέντα ἐν γένηται· τότε γὰρ οὐκέτι μένει ἀπτόμενα. δεῖ δὲ καὶ τὰ ἄπτεσθαι μέλλοντα ἀλλήλων συνεχῇ εἶναι· μεριστὰ γάρ, διότι τὰ ἀμερῇ οὐχ ἄφεται ἀλλήλων. φανερόν οὖν ὅτι ἐν τούτοις ἐστὶ τὸ συνεχές, ἐξ ὧν ἐν τι πέφυκε γίνεσθαι κατὰ τὴν συναφὴν³⁰.

9. Ἐτονίσαμε στὰ προηγούμενα, πὼς οἱ δοξασίες τοῦ Ἀριστοτέλους γιὰ τὸ συνεχές, ὅπως καὶ τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος, δὲν ἀφοροῦσαν στὰ καθαρὰ Μαθηματικά. Ὡστόσο, οἱ δοξασίες αὐτὲς ἦσαν ἀρκετὲς γιὰ νὰ θέσουν σὲ σοβαρὴ ἀμφιβολία τὴ θέση τῶν Μαθηματικῶν ὡς μιᾶς καθαρὰ παραγωγικῆς ἐπιστήμης. Τὸ ἀρχικὸ ἰδεῶδες τῶν Πυθαγορείων, ὅτι τὸ πᾶν εἶναι (ἀκέραιος) ἀριθμός, βρέθηκε σὲ καταστροφικὴ κρίση μὲ τὴν ἐπινόηση ἀσυμμέτρων ποσοτήτων. Τὸ ἰδεῶδες αὐτὸ ἦλθαν νὰ διασώσουν, κατὰ τοὺς Hasse καὶ Scholz, ὁ Ἀντιφὼν (περ. 430 π.Χ.) καὶ ὁ Δημόκριτος (460; - 370;) μὲ τὴν εἰσαγωγή τῆς μεθόδου ἐξαντλήσεως καὶ τῶν ἀπειροστικῶν. Ὡστόσο, πρὸς τὴν ἀποψη αὐτή, ὅτι δηλαδὴ εἰσήχθη τότε ἓνα σύστημα Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ, φέρονται διαφωνοῦντες ἀρκετοὶ μαθηματικοί, παραδεχόμενοι μόνον ὅτι, στοὺς ἀντιπάλους αὐτοὺς τοῦ Ζήνωνος, ἡμπορεῖ κανεὶς νὰ ἀποδώσῃ μιὰ ἀτομιστικὴ ἀντίληψη τοῦ συνεχοῦς. Ἀκριβῶς τὶς πολυαρχικὲς αὐτὲς τάσεις ἐπεδίωξε νὰ καταρρίψῃ ὁ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης μὲ τὰ παράδοξά του, ὅπως καὶ στὰ προηγούμενα ἐτονίσαμε. Ἀκολουθεῖ ὁ Εὐδόξος (408; - 355;), ὁ ὁποῖος, μὲ τὴν Θεωρία τῶν Λόγων του, ἐζήτησε νὰ δαμάσῃ τοὺς ἀσυμμέτρους μὲ τὴ βοήθεια τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν ἡ πρώτη κρίση γιὰ τὰ θεμέλια τῶν Μαθηματικῶν φάνηκε νὰ εἶχε παρακαμφθῇ.

Πολὺ ἀργότερα, ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ 18ου μέχρι καὶ τὰ μέσα τοῦ 19ου αἰῶνος, ἐμφανίζεται ἡ δευτέρη κρίση μὲ ἀφορμὴ τὴν πραγμάτευση τοῦ συνεχοῦς στὸν καθαυτὸ Ἀπειροστικὸ Λογισμό, ἡ ἐπινόηση τοῦ ὁποίου ἀποδίδεται ἀπὸ πολλοὺς στοὺς φιλοσόφους καὶ μαθηματικοὺς Leibniz (1646 - 1716) καὶ Newton (1642 - 1727). Πρέπει ἐδῶ γιὰ τὴν ἱστορικὴ ἀλήθεια νὰ τονισθῇ, πὼς ἀληθὴς πρωτοπόρος γιὰ τὸ μέρος ἐκεῖνο τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ ποὺ λέγεται Ὁλοκληρωτικὸς (Ὁρισμένο Ὁλοκλήρωμα), ὑπῆρξε ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης (287; - 212), ἐνῶ ἡ συμβολὴ στὸν Λογισμό αὐτὸν τῶν Leibniz καὶ Newton πρέπει νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς σημαντικὴ γενίκευση καὶ συστηματοποίηση τῶν μεθόδων τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὡστόσο, ὅπως ἄλλοτε ἔτσι καὶ τώρα, στὸ ἐπίκεντρο τῆς νέας κρίσεως εὐρίσκεται ἡ συζήτηση γύρω ἀπὸ τὴ φύση τοῦ συνεχοῦς. Στὶς μακρὲς συζητήσεις, ποὺ

30. *Εἰς Φυσικὴν* 878, 13-19 Diels.

ἀκολούθησαν, τὸ στοιχεῖο ποὺ κυριαρχεῖ εἶναι βασικά ἢ κάθε φορά διάφορη τοποθέτηση τῶν συζητητῶν. Μὲ τὸν τρόπο αὐτόν, ἡ θεμελίωση τοῦ Ἀπειροστικοῦ παρουσιαζόταν ὡς ἓνα καθαρά φιλοσοφικὸ πρόβλημα, ἀπαράλλακτα ὅπως καὶ σήμερα ἡ θεμελίωση τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων ἀποτελεῖ περισσότερο φιλοσοφικὸ παρά μαθηματικὸ πρόβλημα.

10. Ἀνάλογα μὲ ὅ,τι συνέβη στὴν ἀρχαιότητα, ἡ εἰσαγωγή ἀπείρων μικρῶν ποσοτήτων ἀπετέλεσε καὶ τώρα κατ' ἀρχὰς τὸ μέσον θεραπείας κατὰ τὴν ἰδρυση τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ. Εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ ἰδῇ κανεὶς τί ἀντιλήψεις ἐπικρατοῦσαν τότε γιὰ τὶς ποσότητες αὐτές, ποὺ ὅπως ξέύρομε ἀντιφάσκουν στὸ γνωστὸ αἶτημα τοῦ Ἀρχιμήδους (ἱστορικὰ ὀρθότερο τοῦ Εὐδόξου). Γιὰ τὸν Leibniz οἱ ἀπειροστὲς ποσότητες δὲν εἶναι πραγματικές, ὅπως εἶναι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἀλλὰ ἰδεατές, ὅπως οἱ φανταστικοὶ (κατὰ τὴν ἔκφραση τοῦ ἰδίου τοῦ Leibniz). Ὡστόσο, οἱ ἰδεατές αὐτές ποσότητες ὑπακούουν στοὺς νόμους τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν χάρη σὲ μιὰ μεταφυσικὴ ἀρχὴ διατήρησης τῶν νόμων. Παρὰ ταῦτα, γιὰ τὸν Leibniz ἡ μέθοδός του δὲν διαφέρει στὴν οὐσία ἀπ' ἐκείνη τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων κατὰ τὶς πρῶτες προσπάθειες κατανικήσεως τῆς πρώτης κρίσεως, δηλαδή ἀπὸ τὴ μέθοδο ἐξάντλησεως. Ἡ μέθοδος αὐτή, μαζί μὲ τὴ θεωρία τῶν Λόγων, ἔδωσε στοὺς Ἕλληνας τὸ μέσον γιὰ τὴν ἀντιμετώπιση τοῦ προβλήματος τοῦ συνεχοῦς. Ὁ Leibniz, γιὰ νὰ δώσῃ ἓνα μεταφυσικὸ στοιχεῖο ὡς βάση ἐνὸς κόσμου ἀπολύτων ὄντων, συνέλαβε τὴν ἰδέα τῶν μονάδων. Ὁ ἴδιος λέγει σὲ μιὰ ἐπιστολὴ του: «Στὸ ἰδεατὸ ἢ τὸ συνεχὲς τὸ ὅλον προηγεῖται τοῦ μέρους. Τὰ μέρη εἶναι ἐδῶ μόνον δυνατόμεν. Στὰ πραγματικὰ ὅμως ἀντικείμενα (δηλαδή σ' αὐτὰ ποὺ ἔχουν ὑπόσταση) τὸ ἀπλὸ προηγεῖται τῆς ὁλότητος καὶ τὰ μέρη εἶναι ἐνεργεία, διδόμενα πρὸ αὐτῆς τῆς ὁλότητος. Οἱ σκέψεις αὐτές αἱρουν τὶς δυσκολίες ἀναφορικὰ μὲ τὸ συνεχὲς—δυσκολίες ποὺ προκύπτουν στὴν περίπτωση μόνο ποὺ ἤθελε θεωρήσῃ κανεὶς τὸ συνεχὲς σὰν κάτι πραγματικὸ πού, προτοῦ διαιρεθῇ ἀπὸ μᾶς, ἔχει πραγματικὰ μέρη»³¹. Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, ὁ Newton χρησιμοποιεῖ ἄλλοτε τὴν ἔννοια τῆς ροῆς, ἄλλοτε τὶς διαρκῶς ἐξαφανιζόμενες ποσότητες γιὰ νὰ χαρακτηρίσῃ τὶς ἀπειροστὲς ποσότητες, παίρνοντας γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτὸ μιὰ φυσικὴ ἔννοια. Ὡστόσο, πρόκειται καὶ ἐδῶ γιὰ ποσότητες ποὺ κεῖνται μεταξὺ τοῦ μηδενὸς καὶ ἐνὸς ὁποιουδήποτε θετικοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, πρᾶγμα ποὺ ἀντίκειται στὸ μνημονευθὲν αἶτημα τοῦ Ἀρχιμήδους.

Βέβαια, πρέπει νὰ παραδεχθοῦμε πὼς καὶ ὁ Leibniz καὶ ὁ Newton διαι-

31. Leibniz, *Philosophische Schriften* 3, 622.

σθάνονταν, ὅτι κατὰ τὴν μόρφωση τέτοιων ἀσαφῶν ἐννοιῶν, ποὺ τελικὰ ὀδηγοῦν σὲ ἄτοπα, ὑπῆρχαν πολλὰ σκοτεινὰ καὶ λογικῶς τρωτὰ σημεῖα. Ὅμως γιὰ τὴ διασάφησή των καὶ τὴ θεμελίωση τοῦ Ἀπειροστικοῦ σὲ ἀσφαλῆ βάση, κανεῖς ἀπὸ τοὺς δύο αὐτοὺς μαθηματικοὺς δὲν ἠμπόρεσε νὰ ἐπιτύχῃ ὅ,τι πρὸ αὐτῶν ὁ Εὐδόξος γιὰ τὴν ἐξοδο ἀπὸ τὴν πρώτη κρίση. Πολὺ πιθανὴ εἶναι ἡ εἰκασία πὼς ἡ συνείδηση γιὰ τὴν ὑπαρξὴ τέτοιων ἀντιφάσεων καὶ τρωτῶν ἔκαμε τὸν Newton πολὺ διστακτικὸ γιὰ τὴ δημοσίευση τῶν ἰδεῶν του πού, ὡς γνωστόν, πραγματοποιήθηκε ὕστερα ἀπὸ μεγάλη καθυστέρηση.

11. Τὴ θέση τοῦ Εὐδόξου γιὰ τὴν ὑπερνίκηση τῆς δεύτερης αὐτῆς κρίσεως παίρνουν, στὸν 19ο αἰῶνα, κυρίως οἱ μαθηματικοὶ A. L. Cauchy (1789 - 1857) καὶ C. Weierstrass (1815-1897), ποὺ ἐπεχείρησαν τὴν αὐστηρὴ ἰδρυση τῶν ἀσυμμέτρων στὴ γενικὴ τους ἔκταση. Γιὰ ἓνα μικρὸ διάστημα ἀπὸ τότε ἡ ἀριθμοποίηση τοῦ γεωμετρικοῦ συνεχοῦς, ποὺ ἐγίνε ἀπὸ τὴν ἐργασία τῶν δύο αὐτῶν μαθηματικῶν, θεωρήθηκε ὡς τὸ ἀποφασιστικὸ βῆμα γιὰ τὴν ὀριστικὴ ἀπαλλαγή τοῦ συνεχοῦς ἀπὸ τὰ ἀνεπιθύμητα ἐνορατικὰ στοιχεῖα του. Δὲν ἄργησαν, ὥστόσο, νὰ ἐκδηλωθοῦν καὶ πάλιν ἀμφιβολίες σχετικὰ μὲ τὴν ὀρθότητα καὶ τῶν νέων μεθόδων, ποὺ σὲ τελευταία ἀνάλυση ἐπιζητοῦσαν τὴν πραγμάτευση τοῦ ἀπείρου μὲ τὸ πεπερασμένο.

Ἐπομένως, καὶ ἡ πλήρης ἀριθμοποίηση τοῦ συνεχοῦς, ποὺ ἐπετεύχθηκε μὲ τὸν γενικὸ ὅρισμό τοῦ ἀσυμμέτρου, στὴν πραγματικότητα δὲν ἦταν παρὰ μιὰ ἀπλὴ ἀριθμητικὴ εἰκόνα τοῦ γεωμετρικοῦ συνεχοῦς σὲ τρόπο, ὥστε στὸ βάθος νὰ παραμείνῃ τὸ γεωμετρικὸ ὑπόστρωμα. Ὁ Γάλλος μαθηματικὸς J. Cavaillès λέγει σχετικὰ : «Φάνηκε πὼς ἡ ἀριθμοποίηση ποὺ ἐγίνε στὸν 19ο αἰῶνα ἐπέτυχε νὰ δώσῃ ἓνα ὅρισμό (τοῦ συνεχοῦς) ἀπαλλαγμένο ἀπὸ κάθε ἐνορατικὸ στοιχεῖο. Γιὰ μιὰ, ὅμως, πιὸ ἐπισταμένη κριτικὴ ἐξέταση παραμένει ἡ ἀμφιβολία, ἀπὸ τὸ ἓνα μέρος ἂν ἓνας τέτοιος ἰσχυρισμὸς εἶναι δικαιολογημένος, δηλαδὴ κατὰ πόσον ἡ πραγματικὴ ἐννοια τοῦ ὁρισμοῦ δὲν χρησιμοποιεῖ συγκεκαλυμμένως ἐνορατικὰ στοιχεῖα τῆς ἀμέσου ἐποπτείας καί, ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, ἂν δὲν ὑπάρχῃ στὸν ὅρισμό αὐτὸν περισσότερὸ ἀπὲκ ὅνις παρὰ ἀναγωγὴ, δηλαδὴ κατὰ πόσον πραγματικὰ δὲν βρίσκεται στὴν βάση μιὰ λανθάνουσα γεωμετρικὴ εἰκόνα, ποὺ θεμελιώνει τὴν μοναδικότητα καὶ τὴν ἐνότητα ἐκείνου ποὺ παριστάνει, σὲ ἀναφορὰ μὲ ἀριθμητικὲς σχέσεις παρμένες τυχαῖα σὲ μιὰ ἐξωγενῆ δέσμευση»³². Ἡ ἀποφυγὴ τέτοιων γεωμετρικῶν εἰκόνων ὑπῆρξε ἀκριβῶς ὁ σκοπὸς τοῦ R. Dedekind (1831 - 1916), ποὺ προσπάθησε νὰ ἐδραιώσῃ τοὺς πραγματι-

32. J. Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Paris (Histoire de la Pensée) 1963, 255.

κούς αριθμούς επάνω σε έννοιες της Λογικής, και ο στόχος του G. Cantor (1845 - 1918), που τον ίδιο σκοπό τον ανεζήτησε στην Θεωρία των Συνόλων, αυτής που ο ίδιος υπήρξε ο δημιουργός.

Από το ένα μέρος για τον Dedekind ή ανάλυση των σχέσεων του χώρου (και του χρόνου) έπρεπε, κατ' αντίθετη φορά, να ζητηθῇ στο λογικό οικόδομημα των πραγματικών αριθμών και μ' αυτό στην έννοια του συνεχούς, ως της ολότητας των πραγματικών αριθμών. Από το άλλο μέρος για τον Cantor ή ανάλυση του συνεχούς έπρεπε να γίνῃ με γενικότερες μεθόδους, όπως η διαγωνίος μέθοδος κ.ά., και με βάση τις έννοιες της διατάξεως και του πλήθους των σημείων από τα όποια υποτίθεται συνιστάμενο ένα ευθύγραμμο τμήμα στον ευκλείδειο χώρο.

12. Πώς όμως έπρεπε να ορισθῇ η διάταξη και το πλήθος για ένα όχι πεπερασμένο σύνολο σημείων; Ο Cantor, γενικεύοντας ό,τι συμβαίνει στα πεπερασμένα σημειosύνολα, εργάσθηκε ως εξής: Τὴν έννοια της διατάξεως τὴν ἐστήριξε στὴ σχέση τοῦ προηγείσθαι (ἢ τοῦ ἔπ-εσθαι), πὸν ὑπακούει στοὺς νόμους τῆς ἀσυμμετρίας, τῆς ἀναντανακλαστικότητας, τῆς μεταβατικότητας καὶ τῆς ἀντικαταστάσεως. Ὄταν ὀρίζεται μιὰ τέτοια σχέση γιὰ κάθε ζεύγος στοιχείων ἑνὸς συνόλου—πὸν ἡμπορεῖ ἀδιαφόρως νὰ εἶναι ἓνα ἀφηρημένο σύνολο, ἓνα σημειosύνολο ἢ ἀριθμοσύνολο—τότε ὁ Cantor λέγει τὸ σύνολο διατεταγμένο. Δύο διατεταγμένα σύνολα εἶναι ὁμοία στὴν περίπτωση πὸν ἡμπορεῖ νὰ βρεθῇ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων τους³³, τέτοια πὸν νὰ διατηρῇ τὴ σχέση τοῦ προηγείσθαι. Ἡ τάξη (κλάση) τῶν μεταξύ τους ὁμοίων συνόλων, ὅπως καὶ κάθε ἀντιπρόσωπος τῆς τάξεως, φέρει τὸ ὄνομα τύπος τοῦ συνόλου. Τὸν τύπο τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν γραμμένων κατὰ τὴ φυσικὴ διάταξη (μὲ προηγούμενο τὸν μικρότερο) τὸν συμβολίζει ὁ Cantor μὲ τὸ ἑλληνικὸ γράμμα ω. Ὁ τύπος αὐτὸς διαφέρει ἀπὸ ἐκεῖνον τοῦ ἰδίου συνόλου μὲ διάταξη ὅμως τὴν ἀντίστροφη τῆς φυσικῆς (τύπος ἀντίστροφος τοῦ ω). Ἐνα διατεταγμένο σύνολο εἶναι καλῶς διατεταγμένο στὴν περίπτωση πὸν κάθε ὀχι κενὸ ὑποσύνολό του ἔχει στοιχεῖο πρῶτο, δηλαδὴ τέτοιο πὸν νὰ μὴν προηγεῖται αὐτοῦ ἄλλο στὸ ὑποσύνολο. Ἐτσι καλῶς διατεταγμένα εἶναι τὰ σύνολα τοῦ τύπου ω, ἐνῶ δὲν εἶναι τοῦ ἀντιστρόφου τύπου. Τακτικὸ ἀριθμὸ, σύντομα ἀπλῶς τακτικὸ, ὀνομάζει ὁ Cantor τὴν τάξη τῶν μεταξύ τους ὁμοίων καὶ καλῶς διατεταγμένων συνό-

33. Ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία τῶν στοιχείων δύο συνόλων λέμε τὴν ἀντιστοιχία, ὅταν σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ ἑνὸς συνόλου ἀντιστοιχῇ ἓνα στοιχεῖο τοῦ ἄλλου συνόλου καί, ἀντιστρόφως, κάθε στοιχεῖο τοῦ τελευταίου αὐτοῦ συνόλου εἶναι ἀντίστοιχο ἑνὸς μόνον στοιχείου τοῦ πρώτου συνόλου.

λων. Εὐκόλα βλέπει κανεὶς πὼς οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι, μὲ αὐτὴ τὴν ἔννοια, τακτικοὶ ἀριθμοί· εἶναι οἱ πεπερασμένοι τακτικοὶ σὲ ἀντιδιαστολὴ πρὸς τοὺς ὑπερπεπερασμένους (transfinite). Σ' αὐτοὺς φθάνει ὁ Cantor μὲ βάση τὴν ἀρχή: Ἐάν ἔχομε σύνολο ἀπὸ τακτικοὺς ἀριθμούς, ποὺ ἔχει τὴν ιδιότητα μαζὶ μὲ ἓνα τακτικὸ νὰ ὑπάρχουν στὸ σύνολο καὶ ὅλοι οἱ μικρότεροί του, τότε τὸ σύνολο αὐτό, διατεταγμένο κατὰ τὸ «μέγεθος τῶν τακτικῶν», εἶναι καλῶς διατεταγμένο καὶ ὁ τακτικὸς ἀριθμὸς ποὺ ἀνήκει στὸ ἐν λόγω σύνολο εἶναι ὁ ἐλάχιστος τακτικὸς ποὺ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε τακτικὸ τοῦ συνόλου. Ἀναφορικὰ μὲ τὸ μέγεθος τῶν τακτικῶν, ποὺ μνημονεύσαμε, αὐτὸ ὀρίζεται ὡς ἑξῆς: Σ' ἓνα καλῶς διατεταγμένο σύνολο, τὸ ὑποσύνολο τῶν στοιχείων τοῦ ποὺ προηγοῦνται ἀπὸ δοθὲν στοιχεῖον τοῦ συνόλου, τὸ λέμε ἀπὸ κομμα τοῦ (καλῶς διατεταγμένου) συνόλου (ποὺ ἀνήκει στὸ δοθὲν στοιχεῖο), τὸν τακτικὸ τοῦ ὑπ' ὅψει συνόλου τὸν λέμε μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν τακτικὸ κάθε ἀποκόμματος, ὅπως καὶ ἀντιστρόφως τὸν τακτικὸ κάθε ἀποκόμματος τοῦ συνόλου τὸν λέμε μικρότερο ἀπὸ τὸν τακτικὸ τοῦ συνόλου. Ἀμέσως μεγαλύτερος τακτικοῦ εἶναι ὁ τακτικὸς τοῦ συνόλου ὅλων τῶν τακτικῶν ποὺ εἶναι μικρότεροι ἐκείνου (συμπεριλαμβανομένου τοῦ 0 ὡς τακτικοῦ τοῦ κενοῦ συνόλου) καὶ ποὺ μὲ τὴν διάταξη μεγέθους εἶναι καλῶς διατεταγμένο σύνολο.

Μὲ βάση τὴν ἔννοια τῆς διατάξεως καὶ ἐκείνην τῆς τομῆς ἔχομε τὸν κατὰ Dedekind χαρακτηρισμὸ τοῦ κλειστοῦ γραμμικοῦ συνεχοῦς σημειοσυνόλου μὲ τὶς ἑξῆς ιδιότητες: Εἶναι τὸ διατεταγμένο σημειοσύνολο, μὲ πρῶτο καὶ τελευταῖο σημεῖο, ὅπου κάθε τομὴ δὲν παρουσιάζει κενὸ ἢ πῆδημα καὶ ὅπου ὑπάρχει ἀριθμήσιμο ὑποσύνολό του τέτοιο ὥστε μεταξὺ δύο ὁποιωνδήποτε σημείων τοῦ συνόλου νὰ ὑπάρχη πάντοτε σημεῖο τοῦ ὑποσυνόλου.

13. Γιὰ τὴν ἄλλη βασικὴ ἔννοια τοῦ πλῆθους, ἀλλιῶς τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ (σύντομα ἀπλῶς πληθικοῦ), ὁ Cantor ἀνεχώρησε ἀπὸ τὴν ἔννοια τῆς ἰσοδυναμίας. Δύο σύνολα τὰ ὠνόμασε ἰσοδύναμα, ὅταν μεταξὺ τῶν στοιχείων τους ἤμπορεῖ νὰ βρεθῇ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία. Ἡ ἰσοδυναμία ποὺ ὀρίζεται μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν (ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν τυχὸν ὑπάρχουσα διάταξη τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου), εἶναι φανερόν πὼς ἔχει τὶς ιδιότητες τῆς ἰσότητος, δηλαδὴ τὴν ἀντανακλαστικὴ, τὴν συμμετρικὴ καὶ τὴν μεταβατικὴ. Εἶναι ἀκόμη φανερόν πὼς στὴν ἔννοια τῆς ὁμοιότητος «περιέχεται» ἐκείνη τῆς ἰσοδυναμίας. Μὲ βάση τὴν ἰσοδυναμία, ἓνα σύνολο εἶναι ἁπλοῦς στὴν περίπτωσι ποὺ ὑπάρχει κύριο ὑποσύνολό του ἰσοδύναμο μὲ τὸ ἀρχικό. Στὴν ἐναντία περίπτωσι τὸ σύνολο εἶναι πεπερασμένο. Ὡς πληθικὸ ἀριθμὸ ἐκάλεσεν ὁ Cantor τὴν τάξιν τῶν μεταξὺ τους ἰσοδυνάμων συνόλων, ποὺ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ κάθε σύνολο τῆς

τάξεως. Σὲ πεπερασμένα σύνολα πληθικός εἶναι, ὡς φανερόν, ὁ φυσικός ἀριθμός ποὺ δηλώνει τὸ σύννηθες πλῆθος τῶν στοιχείων του, σὲ τρόπο ὥστε ὁ πληθικός ἀποτελεῖ γενίκευση τοῦ τελευταίου αὐτοῦ πλῆθους. Ἡ σύγκριση ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῶν πληθικῶν γίνεται μὲ βάση τὸν ὁρισμό: Ὁ πληθικός συνόλου εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν πληθικὸ ἄλλου συνόλου, ὅταν τὸ πρῶτο σύνολο εἶναι ἰσοδύναμο μὲ ὑποσύνολο τοῦ δευτέρου, ἀλλὰ τὸ δεύτερο δὲν εἶναι ἰσοδύναμο μὲ ὑποσύνολο τοῦ πρώτου.

Ἐνα σύνολο ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν λέγεται ἀριθμῆσιμος, ἀλλιῶς ἀπαριθμητό, καὶ ὁ πληθικός του παριστάνεται μὲ τὸ ἀρχικὸ γράμμα τοῦ φοινικικοῦ-ἐβραϊκοῦ ἄλφαβήτου \aleph , μὲ δείκτη κάτω δεξιά τὸ μηδέν, προφέρεται δὲ σύντομα ἄλεφ-μηδέν. Τὸ ἀριθμητικὸ συνεχές, ὡς σύνολο τῶν πραγματικῶν μεταξὺ δύο ὁρισμένων πραγματικῶν, ἀποδεικνύεται πὼς δὲν εἶναι ἀριθμήσιμο· ἔχει πληθικὸ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄλεφ-μηδέν γιατί περιέχει τοὺς φυσικούς, ἐνῶ δὲν εἶναι ἀριθμήσιμο. Τὸν πληθικὸ τοῦ συνεχοῦς, τὸν παρέστησεν ὁ Cantor μὲ τὸ ἄλεφ, δίχως δείκτη.

14. Τὰ καλῶς διατεταγμένα σύνολα εἶναι συγκρίσιμα ὄχι μόνον ὡς πρὸς τοὺς τακτικούς των (δύο τέτοια σύνολα ἢ εἶναι ὅμοια ἢ τὸ ἓνα εἶναι ὅμοιο μὲ ἀπόκομμα τοῦ ἄλλου) ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς τοὺς πληθικούς των (δύο τέτοια σύνολα ἢ ἔχουν ἴσους πληθικούς ἢ ὁ ἓνας εἶναι μικρότερος τοῦ ἄλλου). Μένει ὅμως ἀκόμη ἀνοιχτὸ τὸ ἐρώτημα, ἂν σὲ κάθε μὴ πεπερασμένο σύνολο ἢμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ ἰσοδύναμό του καλῶς διατεταγμένο σύνολο. Τὴν θετικὴ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα αὐτὸ τὴν δίνει ἡ λεγομένη «πρόταση τῆς καλῆς διατάξεως», ποὺ λέγει πὼς κάθε σύνολο ἢμπορεῖ νὰ διαταχθῇ καλῶς. Ἀκριβῶς γιὰ τὴν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως αὐτῆς εἰσήγαγε ὁ E. Zermelo (1871 - 1953) τὴν ἀρχὴ τῆς ἐπιλογῆς³⁴. Μὲ βάση τὴν πρόταση τῆς καλῆς διατάξεως διαπιστώνομε, πὼς δύο σύνολα εἶναι πάντοτε συγκρίσιμα ὡς πρὸς τὴ σχέση τῆς ἰσοδυναμίας καὶ πὼς σὲ κάθε πληθικὸ ὑπάρχει ὁ ἀμέσως μεγαλύτερός του, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει πὼς δὲν ὑπάρχει πληθικός ἐνδιάμεσός τους. Ἔτσι, ὁ πληθικός κάθε συνόλου βρίσκεται στὴν καταγραφή τῶν πληθικῶν ποὺ θὰ κάναμε κατὰ τὴν τάξη μεγέθους τους καὶ ποὺ συνήθως κάνομε ἐπὶ γραμμῆς ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά.

Ἡ εἰκασία τοῦ Cantor ὅτι δὲν ὑπάρχει πληθικός μεταξὺ τοῦ ἄλεφ-μηδέν καὶ τοῦ ἄλεφ (μεγαλύτερος τοῦ πρώτου καὶ μικρότερος τοῦ δευτέ-

34. Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἀπὸ τὸν K. Goedel ἀποδείχθηκε τὸ 1954, πὼς ἡ ἀρχὴ τῆς ἐπιλογῆς, ἀπαραίτητη γιὰ τὴν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως αὐτῆς, εἶναι ἀξίωμα συμβιβαστὸ μὲ ὅλα τὰ λοιπὰ ἀξιώματα τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων γιὰ τὰ ὁποῖα θὰ ὁμιλήσωμε στὰ παρακάτω (ὑπὸ τὴν προϋπόθεση φυσικά, ὅτι συμβιβαστὰ εἶναι τὰ λοιπὰ αὐτὰ ἀξιώματα).

ρου), ἔλαβε τὴν ὀνομασία ὑπόθεσις, ἀλλιῶς πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς καὶ ἀπετέλεσεν ἓνα ἀπὸ τὰ πιὸ περίφημα προβλήματα τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων. Γιατί, μὲ τὴν ὑπόθεσις αὕτη θὰ εἶχαμε ἓνα τρόπο νὰ προσπελάσωμε τὸ συνεχές μὲ τὸ διακεκριμένο καὶ ἡ γεφύρωση μεταξὺ συνεχοῦς καὶ ἀσυνεχοῦς θὰ εἶχε πραγματοποιηθῇ — γεφύρωση γιὰ τὴν ὁποία εὐθύς ἀπὸ τὴν ἀρχὴ ἐκάναμε λόγο. Τὸ ἴδιο πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς ἐπιδέχεται καὶ τὴν ἰσοδύναμη διατύπωση, ὅτι δηλαδὴ ἓνα μὴ πεπερασμένο ὑποσύνολο τοῦ συνεχοῦς ἔχει πληθικὸ ἢ τὸ ἄλεφ-μηδέν ἢ τὸ ἄλεφ. Γιὰ δοθὲν σύνολο ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ πληθικὸς τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ εἶναι πάντοτε μεγαλύτερος ἀπὸ αὐτὸν τὸν πληθικὸ τοῦ συνόλου, ὅπως καὶ ὅτι ὁ πληθικὸς ποὺ λαμβάνεται μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν ἀπὸ ἓνα ἀπαριθμητὸ σύνολο εἶναι ἴσος μὲ ἄλεφ.

Σὲ ποιά ὁμῶς σχέσις εὐρίσκεται ἡ καταγραφὴ, κατὰ τάξιν μεγέθους, τῶν πληθικῶν, ποὺ λαμβάνομε μὲ βάση τὴν πρότασις τῆς καλῆς διατάξεως, συγκρινόμενη μὲ τὴν καταγραφὴ τῶν πληθικῶν γιὰ τὰ σύνολα ποὺ λαμβάνομε ἀρχίζοντες π.χ. ἀπὸ τὸ ἀπαριθμητὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ μορφώνοντες, κάθε φορά, τὸ σύνολο ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ προηγουμένου συνόλου; Τὴν ἀπάντησιν στὸ ἐρώτημα γιὰ τοὺς δύο πρώτους ὅρους τῆς ἐν λόγω καταγραφῆς θὰ τὴν ἔδινε ἡ ὑπόθεσις τοῦ συνεχοῦς, στὴν περίπτωσιν φυσικὰ ποὺ τυχόν ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἦταν ἀληθής. Ἡ ἀπάντησις θὰ εἶχε τότε ὡς ἐξῆς: Ὁ πληθικὸς ποὺ εἶναι ἀμέσως μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ ἄλεφ-μηδέν εἶναι ὁ πληθικὸς τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ ἄλεφ. Γιὰ τοὺς λοιποὺς ὅρους τῆς καταγραφῆς θὰ χρησίμευε ἡ λεγομένη γενικευμένη ὑπόθεσις (ἀλλιῶς πρόβλημα) τοῦ συνεχοῦς, ὅτι δηλαδὴ ὁ πληθικὸς τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ὑποσυνόλων γιὰ ἓνα ὁποιοδήποτε σύνολο μὲ πληθικὸ ἄλεφ μὲ κάποιο δείκτη, εἶναι τὸ ἄλεφ μὲ δείκτη κατὰ μονάδα μεγαλύτερο τοῦ δείκτου ἐκείνου, καὶ αὐτὸ πάλιν στὴ περίπτωσιν ποὺ καὶ ἡ γενικευμένη αὕτη ὑπόθεσις θὰ ἦταν ἀληθής.

15. Προτοῦ δώσωμε ἀπάντησιν γιὰ τὸ ὀρθὸ ἢ ὄχι τῆς γενικευμένης ὑποθέσεως τοῦ συνεχοῦς, θεωροῦμε σκόπιμο νὰ συσχετίσωμε τὴν σύγχρονη ἄποψιν γιὰ τὸ μέτρο ἑνὸς σημειοσυνόλου μὲ ἐκείνη τοῦ Ζήνωνος, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία, ὅπως εἶπαμε στὴν παράγ. 2, «ἄθροισμα» ἀπὸ μηδενικά μεγέθη δὲν ἡμπορεῖ νὰ δώσῃ μέγεθος διάφορο ἀπὸ τὸ μηδέν. Ἔτσι θὰ ἰδοῦμε πῶς μὲ τὴν παραδοχὴ τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων (ὅτι ἓνα εὐθύγραμμο τμῆμα συντίθεται ἀπὸ σημεῖα, καὶ τὴν γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τοῦ μήκους διαστήματος σὲ ὁποιαδήποτε σημειοσύνολα) ἐπιτυγχάνομε νὰ ἄρῳμε³⁵ τὸ ἄτοπο ὅπου ὁδηγεῖ ἡ ἐπιχειρηματολογία τοῦ Ἐλεάτου.

35. Βλ. παραγρ. 15.

Τὴν γενίκευση γιὰ τὸ μῆκος, τὴν δίνει ἡ ἐπινόηση ποὺ ἔκανε τὸ 1902 ὁ Γάλλος μαθηματικὸς H. Lebesgue (1875 - 1941) μὲ τὴ Θεωρία τοῦ Μέτρου καὶ πού, σὲ συντομία, θὰ ἡμποροῦσε νὰ σκιαγραφηθῇ ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμε ἓνα σημειοσύνολο (σύντομα σύνολο) ποὺ περιέχεται σὲ κλειστὸ διάστημα (εὐθύγραμμο τμήμα μαζί μὲ τὰ ἄκρα του), καὶ ἓνα σύστημα ἀπὸ ἀπαριθμητὰ τὸ πολὺ διαστήματα (μὲ μερικὴ τυχὸν ἐπικάλυψη) ἔτσι, ὥστε κάθε σημεῖο τοῦ συνόλου νὰ εἶναι στοιχεῖο τοῦ συστήματος. Γιὰ τὸν λόγο αὐτόν, τὸ σύστημα διαστημάτων τὸ λέμε σύστημα ἐπικαλύψεως. Παίρνομε ὕστερα τὸ ὅλικὸ μῆκος τῶν διαστημάτων ποὺ ἀπαρτίζουν τὸ σύστημα ἐπικαλύψεως. Τὸ ὅλικὸ αὐτὸ μῆκος εἶναι πεπερασμένο ἢ ἄπειρο. Τὸ κάτω πέρας³⁶ τῶν ὀλικῶν μηκῶν γιὰ ὅλα τὰ δυνατὰ συστήματα ἐπικαλύψεως τὸ λέμε ἐξωτερικὸ μέτρο τοῦ συνόλου ποὺ θεωροῦμε. Τὸ ἐσωτερικὸ μέτρο, γιὰ τὸ ἴδιο σύνολο, τὸ ὀρίζομε ὡς τὴν διαφορὰ τοῦ ἐξωτερικοῦ μέτρου τοῦ συμπληρωματικοῦ συνόλου (αὐτοῦ ποὺ ἔχει σημεῖα ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸ ἀρχικὸ σύνολο), ἀφαιρουμένου ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

Εἶναι εὐκόλο νὰ ἰδῇ κανεὶς πὼς τὸ ἐσωτερικὸ μέτρο συνόλου εἶναι πάντοτε μικρότερο ἢ τὸ πολὺ ἴσον μὲ τὸ ἐξωτερικὸ μέτρο τοῦ αὐτοῦ συνόλου. Στὴν περίπτωση ποὺ τὰ δύο μέτρα εἶναι ἴσα (τὸ ἐξωτερικὸ μὲ τὸ ἐσωτερικὸ), τότε τὸ σύνολο τὸ λέμε μετρήσιμο καὶ τὴν κοινὴ τιμὴ, κατὰ Lebesgue, μέτρο τοῦ συνόλου. Μιλώντας γιὰ μέτρο συνόλου ἐξυπακούεται πὼς τὸ σύνολο εἶναι μετρήσιμο. Σύμφωνα μὲ τὸν ὀρισμὸ ποὺ δώσαμε, τυχὸν διάστημα (ἀνοικτὸ ἢ κλειστὸ) ἔχει μέτρο καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ σῦνηθες μῆκος του. Ἰσχύει καὶ ὅτι τὸ συνένωμα πεπερασμένου ἢ ἀπαριθμητοῦ πλήθους ἀπὸ μετρήσιμα σύνολα εἶναι πάλιν μετρήσιμο· στὴν περίπτωση ποὺ τὰ ἐν λόγω μετρήσιμα σύνολα εἶναι ἀνὰ δύο ξένα, τότε τὸ μέτρο τοῦ συνενώματός τους εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν ὁρῶν τοῦ συνενώματος.

Μὲ βάση τὴν τελευταία πρόταση καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι ἓνα σημεῖο ἔχει μέτρο τὸ 0, συμπεραίνουμε ὅτι κάθε πεπερασμένο ἢ ἀπαριθμητὸ σύνολο ἔχει μέτρο τὸ 0. Σύνολα ἄρα μὲ μέτρο διάφορο τοῦ 0 πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀπαριθμητά, χωρὶς ὅμως νὰ συμβαίνει καὶ τὸ ἀντίστροφο. Στὸ ἐρώτημα τώρα, ἂν ὅλα τὰ σύνολα ἔχουν μέτρο, ἡ ἀπάντηση εἶναι ἀρνητικὴ καὶ γιὰ τὴν ἀπάντηση αὐτὴν χρησιμεύει τὸ ἀξίωμα ἐπιλογῆς τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων. Ὅπως βλέπομε, στὴ Θεωρία Μέτρου ποὺ ἐκθέσαμε ἀποφεύγεται τὸ παράδοξο τοῦ Ζήνωνος γιὰ τὰ πολλὰ, ἂν τὸ θεωρήσωμε ἀπὸ καθαρὰ μαθηματικὴ ἄποψη.

36. Φ. Βασιλείου, *Μαθήματα Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν* 1, Ἀθήναι 1950, 12.

16. Θεωροῦμε τώρα ἀπαραίτητες μερικές κριτικές παρατηρήσεις στὴ θεωρία τοῦ Cantor. Στὴ βασικὴ ἔννοια τῆς θεωρίας, τὴν ἔννοιαν τοῦ συνόλου ὡς πρωταρχικὴν, δὲν ἤμπορεῖ νὰ δοθῇ ἀκριβὴς ὁρισμός, σὲ τρόπο ὥστε τὸ νόημά της δὲν εἶναι μονοσήμαντα καθωρισμένο. Αὐτὸ συμπεραίνεται καὶ ἀπὸ τὶς ἀποκλίνουσες σημασίες ποὺ ἀποδόθηκαν στὸ σύνολο, ἀκόμη καὶ ἐξ ἀρχῆς ποὺ ἀναπτύχθηκε ἡ θεωρία³⁷. Πρῶτος ὁ Zermelo, παρακάμπτοντας τὸ ἀνέφικτο ἐνὸς ἀμέσου ὁρισμοῦ γιὰ τὴν πρωταρχικὴ αὐτὴ ἔννοια, εἰσήγαγε τὴν ἀξιοματικὴ δόμηση τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων μὲ τὴν νεώτερη ἐκδοχὴ τῶν ἀξιωμάτων, ὅπως αὐτὴ διαμορφώθηκε ἀπὸ τὸν D. Hilbert (1862 - 1943), καὶ μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν ἐγκαινίασε τὶς ἔρευνες πρὸς τὴν κατεύθυνση αὐτή. Ἡ ἀξιοματικοποίηση αὐτὴ χρησίμευσε καὶ γιὰ τὴν ἀποφυγὴ τῆς ἄλλης δυσυπέρβλητης δυσκολίας ποὺ παρουσιάσθηκε, στὰ πρῶτα σχεδὸν βήματα τῆς θεωρίας, μὲ τὴν ἐμφάνιση τῶν παραδόξων ἢ ἀντινομιῶν. Ὑστερα ἀπὸ τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος τοῦ Ἐλεάτου, εὕρισκόμεθα στὴν πρώτη σοβαρὴ κατάσταση ποὺ δημιούργησαν οἱ νέες καὶ πολὺ πιὸ οὐσιώδεις ἀντιφάσεις στὴν ἱστορία τῆς σκέψεως. Γιατὶ οἱ ἀντινομίες τοῦ καθαροῦ λόγου τοῦ Kant (1724 - 1804), καὶ τὰ παράδοξα τοῦ ἀπείρου τοῦ B. Bolzano (1781 - 1848), ποὺ προηγήθηκαν, ἦσαν στὴν πραγματικότητά πολλὴ μικρότερης σημασίας.

Παρὰ ταῦτα σήμερα κανένα ἀπὸ τὰ συστήματα ἀξιωμάτων, ποὺ ἔκτοτε ἐπρωτάθησαν γιὰ τὴ δόμηση τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, δὲν ἐγίνε γενικὰ παραδεκτό. Ἐξ ἄλλου, ὅπως θὰ ἰδοῦμε, ὑπάρχουν ὀλοκλήρες Σχολές ποὺ ἀντιμετωπίζουν τὴν θεωρία ἀπὸ τελείως διάφορη σκοπιά. Ἄς μὴ νομισθῇ, ὅμως, πὼς ἀπὸ τὶς ἀποκλίσεις αὐτὲς ἐπηρρέασθηκε, τὸ παραμικρό, ἡ μεγάλη σημασία ποὺ δίκαια ἀποδόθηκε στὴ Θεωρία τῶν Συνόλων. Πολλοὶ διεΐδαν σ' αὐτὴν τὴν ἀποκλειστικὴ δυνατότητα γιὰ τὴν ἀσφαλῆ θεμελίωση ὀλοκλήρου τοῦ οἰκοδομήματος τῶν Μαθηματικῶν. Εἶναι ἰδιαίτερα ἀξιοσημεῖωτο τὸ γεγονός, ὅτι πολλὲς μαθηματικὲς ἔννοιες δημιουργοῦνται καὶ ἐρμηνεύονται μέσα στὸ πλαίσιο τῆς θεωρίας αὐτῆς.

Ἡ πρώτη ἀξιοματικοποίηση τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων ἀπὸ τὸν Zermelo συμπληρώθηκε ἀργότερα ἀπὸ τὸν A. Fraenkel (1891 - 1967) (τὸ συμπληρωμένο σύστημα ἀξιωμάτων παριστάνεται σύντομα μὲ τὰ ἀρχικὰ ZF). Ἀκολούθησαν ὅμως καὶ ἄλλα συστήματα τέτοιων ἀξιωμάτων, ὅπως π.χ. ἐκεῖνο τῶν Neumann - Bernays (σύντομα NB). Πρέπει νὰ παρατηρηθῇ, πὼς ἐκεῖνο ποὺ κυρίως ἐπεδίωξεν ὁ Cantor μὲ τὴν θεω-

37. O. Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, München 1954, 316. Στὴν ἀλληλογραφία μεταξὺ Cantor καὶ Dedekind βλέπομε, ὅτι ὁ πρῶτος ἔδινε στὸ σύνολο τὸ μεταφυσικὸ νόημα μιᾶς ἀβύσσου, ἐνῶ ὁ δεύτερος τὸ θεωροῦσε σὰν «ἓνα σάκκο μὲ ἄγνωστα πράγματα».

ρία του ήταν ή εξερεύνηση τοῦ ἐνεργεία ἀπείρου, αὐτοῦ ποὺ μὲ τόση ἐπιμονή ἀπέκλειαν, ἀπὸ τὸν Ἀριστοτέλη καὶ ἔπειτα, ὅλοι οἱ πρὶν ἀπὸ τὸν Cantor μαθηματικοί. Καὶ πάλιν, ἐκεῖνο ποὺ προέχει στὴν ἐπιδίωξη αὐτὴν εἶναι τὸ πρόβλημα γιὰ τὴ φύση τοῦ συνεχοῦς. Ἀφετηρία εἶναι τὸ ἔτοιμο, τὸ τελειωμένο, σύνολο ἀπὸ ἄπειρα τὸ πλῆθος στοιχεῖα. Τὸ πρόβλημα συνίσταται ἀκριβῶς στὸν τρόπο ποὺ θὰ τὸ εἰσαγάγη κανεὶς στὰ Μαθηματικά. Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν Ἀξιοματικὴ σημειώσαμε πιὸ πάνω ὅτι δημιουργήθηκαν καὶ ἄλλες μέθοδοι γιὰ τὸν λόγο αὐτόν.

Ὅπως καὶ στὰ προηγούμενα ἐτονίσουμε, τὸ πρόβλημα γιὰ τὸ συνεχές ἔχει ὡς ἀντικείμενο τὴ γεφύρωση τοῦ χάσματος ποὺ τὸ χωρίζει ἀπὸ τὸ διακεκριμένο. Ὁ Cantor μὲ τὴ θεωρία του ἐπεξήτησε τὴν προσπέλαση τοῦ πρώτου μὲ τὸ δεύτερο. Ὑπάρχει ὁμως καὶ ἡ δυνατότης τῆς ἀντίθετης πορείας, νὰ θεωρήσῃ δηλαδὴ κανεὶς τὸ συνεχές ὡς πρωταρχικὴ ἔννοια καὶ ξεκινώντας ἀπ' αὐτὴν νὰ ζητήσῃ νὰ δομήσῃ τὸ ἀσυνεχές. Τέτοιες τάσεις δὲν ἔλειψαν ὁλότελα ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα καὶ τὰ ἴχνη τους τὰ ἐπισημαίνομε σαφῶς σήμερα στὴν λεγόμενη Ἐνορατικὴ Σχολή.

17. Ὅπως παρατηρήσαμε ἤδη, ἓνα σύστημα ἀπὸ ἀξιώματα γιὰ τὴ Θεωρία τῶν Συνόλων πρέπει νὰ ἀποβλέπῃ, μεταξὺ ἄλλων, στὴ μετάβαση ἀπὸ τὸ πεπερασμένο στὸ ὑπερπεπερασμένο, δηλαδὴ στὸ ἐνεστωτικὸ ἄπειρο. Ἐτσι, κοντὰ στὰ λεγόμενα κατασκευαστικὰ ἀξιώματα, ποὺ περιλαμβάνουν καὶ τὸ ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς, ἔχομε τὰ ἀξιώματα γιὰ τὸ ἄπειρο. Μὲ τὰ ἀξιώματα αὐτὰ εἰσάγονται, ἀπὸ τὸ ἓνα μέρος ἡ ὑποθετικὴ ὑπαρξὴ γιὰ ὠρισμένα, κατάλληλα κατασκευασμένα, σύνολα, ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἡ ὑπαρξιακὴ παραδοχή, ποὺ ἐξασφαλίζει τὴν ὑπαρξὴ κάποιου συνόλου ἐνεργεία ἀπείρου. Συνήθως παριστάνομε μὲ ZF' τὸ σύστημα ἀξιωμάτων Zermelo - Fraenkel δίχως τὸ ἀξίωμα ἐπιλογῆς καὶ μὲ YΣ ἢ ΓΥΣ τὴν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ἀντιστοίχως τὴν γενικευμένην ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς.

Εἶναι γενικὰ παραδεκτό, πὼς ἓνα ἀπὸ τὰ μεγάλα γεγονότα γιὰ τὴ Θεωρία τῶν Συνόλων, κι' ἓνα ἀπὸ τὰ πιὸ σημαντικὰ κατὰ τὴν τελευταία δεκαετία γιὰ ὅλα τὰ Μαθηματικά, ἦταν ἡ ἀπόδειξη ποὺ ἐπέτυχε τὸ 1963 ὁ P. J. Cohen, ὅτι ἡ γενικευμένη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ἀποτελεῖ πρόταση ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὰ ἄλλα ἀξιώματα, δηλαδὴ μὴ ἀποδείξιμη ἀπὸ αὐτά³⁸. Ἡ ἀπόδειξη αὐτὴ στάθηκε ἡ ἀφορμὴ στὸ νὰ δοθῇ (Μόσχα 1966) στὸν ἐπινοητὴ της τὸ Fields - Medaille, ἡ πιὸ μεγάλη διάκριση ποὺ δίνεται σὲ μαθηματικοὺς ἐρευνητὰς στὰ διεθνῆ μαθηματικὰ συνέδρια καὶ ποὺ γιὰ τὰ Μαθηματικά εἶναι τὸ ἀνάλογο τοῦ βραβείου Nobel. Ἐτσι βρῆκε τὴ

38. P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis* 1 (Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, 50) 1963, 1143-8 καὶ 2 (51) 1964, 105-110.

ύση του ἕνα ἀκόμη ἀπὸ τὰ περίφημα προβλήματα, ποὺ στὴν ἀρχὴ τοῦ αἰῶνος μας, μὲ τὴν εὐκαιρία τοῦ πρώτου διεθνoῦς μαθηματικοῦ Συνεδρίου (Παρίσιοι 1900), ἐξήγγειλεν ὁ D. Hilbert (1862 - 1943) ὡς τὰ κατ' ἐξοχὴν πρὸς λύσιν προτεινόμενα.

Τὸ ἐπίτευγμα τοῦ Cohen ἀποτελεῖ ἕνα παράδειγμα γιὰ τὸ γνωστὸ γεγονός ὅτι ὁποιαδήποτε ἀξιώματα τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, ἐφ' ὅσον περιλαμβάνουν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, δὲν εἶναι π λ ή ρ η. Παρὰ ταῦτα, ὅ ὅτι ἀκριβῶς ἡ ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ἀποτελοῦσε ἕνα τέτοιο παράδειγμα γιὰ τὴν ἔλλειψη πληρότητος, ἦταν κάτι ποὺ ἀσφαλῶς κανεῖς δὲν ἐπερίμενε. Ἴσως τοῦτο νὰ ὀφείλεται καὶ στὴ προηγηθεῖσα ἀπόδειξη, τόσον ἀπὸ τὸν K. Goedel (1900 -)³⁹ ὅσον καὶ ἀπὸ τὸν ἴδιον τὸν Cohen, ὅτι ἡ γενικευμένη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ἦταν πρόταση συμβιβαστὴ μὲ τὰ ἄλλα ἀξιώματα NB, ἀπόδειξη ποὺ ἐπετεύχθη μὲ τὴν κατασκευὴ καταλλήλου π ρ ο τ ὕ π ο υ (μοντέλου). Σ' ἕνα τέτοιο πρότυπο ἔχει κανεῖς τὴν δυνατότητα νὰ ἐκλέξη, μὲ ἀρκετὴ ἐλευθερία, ἕνα πληθικὸ ὕστερα ἀπὸ τὸ ἄλφ - μηδέν, ποὺ θὰ ἠθέλε νὰ ἐ π ι β ἄ λ η σ τ ὶ συνεχές. Ἐξ ἄλλου, τέτοια πρότυπα μᾶς εἶναι χρήσιμα ὄχι μόνον ὡς ἀποδείξεις ἀνεξαρτησίας ἀξιωμάτων, ἀλλὰ καὶ γιὰ τὴν ἐξακρίβωση τῶν δυνατοτήτων ποὺ ὑποκρύπτει ἡ ἀπὸ τὴν ἐνόραση διδόμενη ἐννοια τοῦ συνόλου. Ἄς σημειωθῇ εἰς τὸ σημεῖο αὐτό, πῶς ὁ ἴδιος ὁ Cantor εἶχε συνείδηση τόσο γιὰ τὴν ἀσάφεια τῆς ἐν λόγω ἐννοίας, ὅσο καὶ γιὰ τὴς δυνατὲς ἐρμηνεῖες ποὺ ἡ ἐννοια αὐτὴ ἤμποροῦσε νὰ δεχθῇ. Μὲ τὸ νόημα αὐτὸ ἡ ἐκφραση τοῦ ἰδίου, ὅτι σ' ἕνα σύνολο διέβλεπε μιὰ ὁλόκληρη ἀβυσσὸς, ἀποδείχθηκε ἀπὸ τὰ πράγματα πῶς δὲν στερεῖται δόση ἀληθείας. Ὡστόσο, εἶναι συζητήσιμο κατὰ πόσον ὁ Cantor θὰ ἔβλεπε μὲ ἱκανοποίηση τὴν ἐκβαση ποὺ πῆρε τὸ «ὄνειρο τῆς ζωῆς του», —ποὺ γι' αὐτὸν ἦταν ἡ ἀπόδειξη τῆς ὀρθότητος τῆς ὑποθέσεώς του—, στὴν περίπτωση, φυσικά, ποὺ ἡ ἀνεξαρτησία τῆς ὑποθέσεώς του ἀπὸ τὰ ἄλλα ἀξιώματα ἠθέλε διαπιστωθῇ ὅταν ἀκόμη ὁ ἴδιος εὕρισκόταν στὴ ζωὴ. Γνωρίζομε πόσες ἀνεπιτυχεῖς προσπάθειες κατέβαλεν ὁ Cantor γιὰ τὴν πραγμάτωση τοῦ οὐνείρου του, προσπάθειες ποὺ τὸν ὠδήγησαν στὸ κατῶφλι τῆς ἀπογνώσεως καὶ τῆς γενικῆς καταρρεύσεως.

18. Ἀποτέλεσμα τῆς ἀποδείξεως γιὰ τὸ ἀνεξάρτητο τῆς (γενικευμένης) ὑποθέσεως τοῦ συνεχοῦς ἀπὸ τὰ ἄλλα ἀξιώματα τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων ἦταν νὰ ἐμφανισθοῦν στὴ θεωρία αὐτὴ δ ι α κ λ α δ ὶ σ ε ι ς παρόμοιες μὲ ἐκεῖνες ποὺ εἶχαν ἄλλοτε παρουσιασθῇ στὴν Γεωμετρία μὲ τὴν ἀπόδειξη τῆς ἀνεξαρτησίας τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων ἀπὸ τὰ λοιπὰ ἀξιώματα,

39. K. Goedel, *The consistency of the continuum hypothesis*, Ann. Math. Studies No 3 (1940, 1951³).

καὶ ποὺ ὠδήγησε τότε στὴν δημιουργία τῶν λεγομένων μὴ Εὐκλείδειων Γεωμετριῶν. Γεννᾶται ὁμως τώρα ἓνα ἀκόμη πιὸ σημαντικό ζήτημα : Ποιὰ θὰ εἶναι, ἄραγε, ἡ σημασία τῶν διακλαδώσεων τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων γι' αὐτὴν τὴν ἴδια τὴν θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν; Εἶναι ἀλήθεια πὼς γιὰ ὅλους ἐκείνους ποὺ δυσπιστοῦσαν παλαιότερα σὲ ὄντολογικὲς παραδοχὲς ἀναφορικὰ μὲ τὰ ἄπειρα σύνολα, οἱ ὑπ' ὄψει διακλαδώσεις προσθέτουν ἓνα ἰσχυρὸ ἐπιχείρημα γιὰ τὴν ἄποψή τους. Ἴσως μᾶς εἰποῦν τώρα, πὼς παρόμοιες διακλαδώσεις πρέπει νὰ ἀναμένονται καὶ σ' ἄλλες μαθηματικὲς περιοχὲς, περιοχὲς ποὺ ἔμεναν μακριὰ ἀπὸ κάθε τέτοια ὑπόνοια.

Ὡστόσο, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ ἂν κάτι τέτοιο ἤθελε συμβῇ, θὰ ἔχουμε κάθε δικαίωμα νὰ ὁμιλοῦμε εἰς τὸ μέλλον γιὰ μιὰ ἀπὸ τὶς πολλὲς Θεωρίες τῶν Συνόλων, ἀπαράλλακτα ὅπως τοῦτο γίνεται σήμερα γιὰ τὶς ὁ μ ἄ δ ε ς ἢ γιὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς δ α κ τ υ λ ί ο υ ς κ.ἄ. Ὁδηγεῖ, ἄραγε, αὐτὸ σὲ μιὰ πλήρη ἀναρχία σχετικὰ μὲ τὴ θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν; Κατὰ τὸν A. Robinson «ὑπάρχουν ὠρισμένοι βασικοὶ τύποι σκέψεως ποὺ βρίσκονται πρὶν ἀπὸ κάθε ἐκλογή μαθηματικῶν ἀξιωμάτων. Ἴσως, ἀπὸ τὶς σημερινὲς δυσκολίες νὰ ξεπηδήσῃ μιὰ πιὸ βαθειὰ κατανόηση γιὰ ἓνα κοινὸ πυρῆνα σὲ ὅλα τὰ Μαθηματικά»⁴⁰. Ὅπωςδήποτε, βέβαιο εἶναι, πὼς εἰς τὸ ἐξῆς καμμιά ἀπὸ τὶς διακλαδωμένες θεωρίες τῶν Συνόλων δὲν θὰ ἡμπορεῖ νὰ διεκδικῇ τὸ προνόμιο τῆς πραγματικῆς ἀληθοῦς, ἀκριβῶς ὅ,τι συμβαίνει σήμερα καὶ μὲ τὶς διάφορες Εὐκλείδειες καὶ μὴ Εὐκλείδειες Γεωμετρίες.

19. Ἄς ρίξουμε ὁμως μιὰ ματιά καὶ στὴν ἄποψη ἐκείνων ποὺ ἀντιμετωπίζουν τὸ συνεχὲς ἀπὸ μιὰ διαφορετικὴ σκοπιά. Πρόκειται γιὰ τοὺς ὁπαδοὺς τῆς λεγομένης Ἐνορατικῆς Σχολῆς μὲ ἀρχηγὸ τὸν L.E.J. Brouwer (1881 - 1966). Ὁ Brouwer στὸ ξεκίνημα τῆς θεωρίας του, ποὺ ἀποσκοποῦσε στὸ νὰ συλλάβῃ τὴν οὐσία τῶν Μαθηματικῶν ἀπὸ τὴν ἀνάλυση τῆς ἴδιας τῆς σκέψεως καὶ κατέφυγεν ἔτσι στὴν ριζικὴ ἀναμόρφωση τῶν παραδοσιακῶν Μαθηματικῶν, ὑπέστη ἀρχικὰ τὴν ἐπίδραση τοῦ G. Mannoury (1867 - 1956). Ἡ κυρία ἀπόκλιση μεταξὺ τους βρίσκεται στὸ γεγονός, ὅτι ἐνῶ ὁ Mannoury εἶχε πάντοτε στὴν ἔρευνά του μιὰ κοινωνιολογικὴ τάση, ἀντίθετα ὁ Brouwer θεωροῦσε τὰ Μαθηματικὰ καθ' ἑαυτὰ καὶ ὄχι σὰν ἓνα κοινωνικὸ φαινόμενο⁴¹. Ἐξ ἄλλου, ὑπάρχει μιὰ φανερὴ ἀναλογία ἀνάμεσα στὶς ἀπόψεις τοῦ Brouwer καὶ τῆς λεγομένης Θετικιστικῆς Σχολῆς, ποὺ ἀποκηρύσσει κάθε μεταφυσικὴ (ὄντολογικὴ) θέση καὶ δέχεται ὡς πραγματικὸ μόνον ὅ,τι ἡμπορεῖ νὰ γίνῃ γνωστὸ μὲ τὴ βοήθεια τῆς ἐπαισθήσεως.

40. I. Lakatos (Ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1967, 104.

41. Φ. Βασιλείου, *Λογική, Γλῶσσα καὶ Μαθηματικά*, «Φιλοσοφία» 2 (1972) 69, σημ. 18.

Είναι γνωστό, πώς ή ύπαρξη για τα μαθηματικά αντικείμενα ταυτίζεται για τους ένορατικούς με την κατασκευή τους. Σχεδόν όλα τα μαθηματικά τα βασίζουν αυτοί στην έννοια του φυσικού αριθμού, που οί οίιοι την θεωρούν σαν κάτι που μᾶς δίνει ή ενόραση. Μετά τους φυσικούς αριθμούς, εκείνο που παίρνει κεντρική θέση στη διδασκαλία των Ένορατικών είναι ή ἄλλη σημαντική γι' αυτούς έννοια, ή έννοια του συνεχούς. Οί Ένορατικοί κατασκευάζουν τὸ (κλειστό) γραμμικὸ συνεχές ὡς ἑξῆς: Αναχωροῦν ἀπὸ τὰ διάφορα μεταξύ τους δυαδικὰ κλάσματα, π.χ. τὰ μεταξύ 0 καὶ 1, δηλαδή τὰ μικρότερα τοῦ 1 θετικὰ κλάσματα που ἔχουν παρονομαστή φυσική δύναμη τοῦ 2, τὰ ὁποῖα κατατάσσουν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ παρονομαστοῦ καὶ γιὰ τὸν ἴδιο παρονομαστή κατὰ τὴν τάξη μεγέθους τοῦ ἀριθμοῦ. Στὴν ἀλληλουχία τῶν δυαδικῶν αὐτῶν κλασμάτων προτάσσουν τοὺς ἀριθμούς 0 καὶ 1. Ένας πραγματικὸς ἀριθμὸς παράγεται με τὸν προσδιορισμό, σὲ κάθε δυαδικὸ κλάσμα, τοῦ κατηγορήματος ἀριστερὸ ἢ δεξιό, που ἡμπορεῖ νὰ ἐκλεγῇ με τρόπο, ὥστε ἂν σ' ἓνα τέτοιο κλάσμα δοθῇ τὸ κατηγορήμα ἀριστερὸ ἢ δεξιό, τότε καὶ σὲ κάθε κλάσμα τῆς ἀλληλουχίας (μικρότερό του, ἀντιστοίχως μεγαλύτερό του) πρέπει νὰ δοθῇ τὸ κατηγορήμα ἀριστερὸ ἀντιστοίχως δεξιό. Στὴν περίπτωση που δὲν δίδεται σ' ἓνα κλάσμα τῆς ἀλληλουχίας ὠρισμένο κατηγορήμα, τότε τὸ κατηγορήμα γιὰ τὰ μεγαλύτερά του θὰ εἶναι τὸ δεξιό καὶ γιὰ τὰ μικρότερά του τὸ ἀριστερό. Για τὴν παραγωγή ἑνὸς συγκεκριμένου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ὁ προσδιορισμὸς γίνεται με βάση κάποιο νόμο, με μιὰ τὸ πολὺ ἐξαίρεση, σὲ τρόπο ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχη ὁποιαδήποτε ἐλευθερία στὴν ἐκλογή τῶν κατηγορημάτων. Ἄν ὅμως δώσωμε στὸ 0 τὸ κατηγορήμα ἀριστερὸ καὶ στὸ 1 τὸ κατηγορήμα δεξιό, τότε ὁ προσδιορισμὸς αὐτὸς δὲν ἐπηρεάζει τὴν ἐλεύθερη ἐκλογή κατηγορήματος γιὰ τὰ δυαδικὰ κλάσματα τὰ μεγαλύτερα τοῦ 0 καὶ τὰ μικρότερα τοῦ 1. Ἔτσι ἔχομε, κατὰ τοὺς Ένορατικούς, τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν στὸ κλειστὸ διάστημα ἀπὸ 0 ἕως 1. Στὴν περίπτωση που ἀντὶ 0 καὶ 1 εἶχαμε δυὸ πραγματικούς ἀριθμούς α καὶ β (με α μικρότερο τοῦ β), τότε τὸ κλειστὸ διάστημα ἀπὸ α ἕως β ἡμπορεῖ νὰ ὀρισθῇ ὡς ἑξῆς: Κάθε δυαδικὸ κλάσμα που στὴ παραγωγή τοῦ α ἔχει τὸ κατηγορήμα ἀριστερό, διατηρεῖ τὸ κατηγορήμα αὐτό, ὅπως καὶ κάθε δυαδικὸ κλάσμα που στὴν παραγωγή τοῦ β ἔχει τὸ κατηγορήμα δεξιό, διατηρεῖ τὸ κατηγορήμα αὐτό. Πλὴν αὐτοῦ, ἔχομε πλήρη ἐλευθερία στὴν ἐκλογή τῶν κατηγορημάτων γιὰ τὰ θεωρούμενα δυαδικὰ κλάσματα. Ἄν ἐξαιρέσωμε τὶς δύο ἀκραίες περιπτώσεις, δηλαδή ἐκείνη που ὁ νόμος προσδιορισμοῦ τῶν κατηγορημάτων περιορίζει πλήρως τὴν ἐλευθερία ἐκλογῆς καὶ ἐκείνη που ἀφήνει πλήρη ἐλευθερία (με ἐξαίρεση φυσικὰ τὸν περιορισμὸ σχετικὰ με τὴ τάξη μεγέθους τῶν δυαδικῶν κλασμάτων), ὑπάρχει ή δυνατότης ὁ νόμος αὐτὸς νὰ ἀφήνη κάποια ἐλευθερία ἐκλογῆς, ὅταν ὀρίζεται ἓνα σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Όπως βλέπει κανείς από τὰ ἀνωτέρω, οἱ Ἑνορατικοὶ ὁμιλοῦν γιὰ τὸ πῶς παράγεται ἓνας πραγματικὸς ἀριθμὸς, ὃχι ὅμως γιὰ τὸ τί εἶναι ὁ ἐν λόγῳ ἀριθμὸς. Ἐξ ἄλλου, ἀντὶ τῶν κατηγορημάτων ἀριστερὸ ἢ δεξιό, εἶναι δυνατόν νὰ θεωρηθοῦν διαστήματα μὲ ἄκρα δυαδικὰ κλάσματα καὶ ἡ παραγωγή πραγματικοῦ ἀριθμοῦ νὰ γίνη ἀπὸ ἀλληλουχία διαστημάτων πού, ἀπὸ τὸ δεύτερο κι ἔπειτα, καθένα τους νὰ εἶναι κύριο ὑποδιάστημα τοῦ προηγούμενου.

20. Ἐκεῖνο ποὺ χαρακτηρίζει τὴν θέση τῶν Ἑνορατικῶν εἶναι, κυρίως, οἱ κατασκευές. Ἀπὸ αὐτὲς προκύπτει κάθε παραδεκτὴ μαθηματικὴ πρόβαση, ὅπως ἐκείνη ὅπου ἓνα συγκεκριμένο πραγματικὸ ἀριθμὸ τὸν ὀρίζει ἓνας νόμος. Ὁ Brouwer ἰσχυρίζεται πῶς εἶναι δυνατός ἓνας ἀπόλυτος ὀρισμὸς γιὰ τὴν μαθηματικὴ κατασκευή. Οὔτε ὅμως ὁ ἴδιος οὔτε κανεῖς ἀπὸ τοὺς ὁπαδούς του δὲν καθώρισε ἐπακριβῶς τί εἶναι μαθηματικὴ κατασκευή. Σὲ ἀπόκλιση ἀπὸ τὸ αἶτημα τῆς κατασκευῆς τὸ συνεχές δὲν λαμβάνεται στὴν Ἑνορατικὴ Σχολή ἀπὸ ὁποιαδήποτε κατασκευή, ἀλλὰ ἀπὸ ἀλληλουχίας ἐλεύθερης ἐκλογῆς. Αὐτὸ δικαιολογεῖται μὲ τὸν ἰσχυρισμό, ὅτι τὸ συνεχές δὲν εἶναι κάτι τὸ τελειωμένο. Τὸ συνεχές, ἔτσι ὅπως ὀρίζεται ἀπὸ τοὺς Ἑνορατικούς, εἶναι τελείως διάφορὸ ἀπὸ ἐκεῖνο τοῦ Cantor καί, φυσικά, ἀπὸ ὃ, τι ἐννοοῦσαν οἱ μαθηματικοὶ πρὶν ἀπὸ τὸν Brouwer. Ἐκτὸς ἀπ' αὐτό, τὸ μὴ ἀπαρτῆται τὸ ἄπειρο τῆς κλασσικῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων δὲν ἔχει θέση στὶς ἀπόψεις τῶν Ἑνορατικῶν.

Ἄς σημειωθῇ ἐδῶ, ὅτι ἡ ἐλεύθερη ἐκλογή τῶν ἀλληλουχιῶν στὴν παραγωγή τοῦ συνεχοῦς, εἶναι ἐκείνη ποὺ ἀποδεσμεύει, κατὰ τοὺς Ἑνορατικούς, τὸ ἄπειρο ἀπὸ τὴν ἐννοια τοῦ νόμου. Ἀκόμη ὅτι, παρὰ τὸν σοβαρὸ περιορισμὸ ποὺ ὑπέστησαν τὰ παραδοσιακὰ Μαθηματικὰ μὲ τὸν σκοπὸ νὰ προσαρμοσθοῦν στὶς ἀπαιτήσεις τῆς Ἑνορατικῆς Σχολῆς, εἶναι ἄξιο ἰδιαιτέρου τονισμοῦ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Brouwer, μένοντας συνεπὴς στὴ διδασκαλία του, κατῴρθωσε νὰ ἀναπτύξῃ μιὰ Θεωρία Συνόλων στὴν ὁποία ὃχι μόνον ἀποκλείονται οἱ κλασσικὲς μέθοδοι (ὅπως π.χ. ἡ λεγομένη διαγώνιος μέθοδος), ἀλλὰ καὶ αὐτὴ ἡ λογικὴ ἀρχὴ τοῦ ἀποκλειομένου τρίτου δὲν ἔχει ἐφαρμογή.

21. Σὲ ποιό, ὅμως, σημεῖο προόδου βρίσκεται σήμερα ἡ σχετικὴ ἔρευνα; Παράλληλα μὲ τὴν Ἑνορατικὴ θέση, ποὺ ζητήσαμε νὰ σκιαγραφήσωμε, οἱ μαθηματικοὶ ποὺ ἐμμένουν στὴν παραδοσιακὴ θέση προσπαθοῦν μὲ ὅλον ἐν αὐξανόμενη δραστηριότητα νὰ θέσουν ὑπὸ ἔλεγχον τὴν πραγματικὰ χαώδη κατάσταση ποὺ δημιουργήθηκε ὕστερα ἀπὸ τὴν ἀπόδειξη γιὰ τὸ ἀνεξάρτητο τῆς ὑποθέσεως τοῦ συνεχοῦς ἀπὸ τὰ λοιπὰ ἀξιώματα τῆς (ἀξιο-

ματικοποιημένης) Θεωρίας τῶν Συνόλων. Βέβαια, ἡμπορεῖ νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι χαώδης ὑπῆρξε ἡ κατάσταση κάθε φορά πού μαθηματικές θεωρίες εὑρίσκοντο στὸ στάδιο τῆς διαμορφώσεως. Ἐκεῖνο πού πάντοτε ἔσωσε τὰ πράγματα, καὶ πού ἀναμένεται καὶ τώρα νὰ τὰ σώσει, εἶναι ἡ ἐκ βάθρων ἀναδιοργάνωση, μὲ σκοπὸ τὴν ἀποσαφήνιση τῆς καταστάσεως. Χρειάζονται νέες ιδέες στὰ Μαθηματικά — ιδέες πού, μαζί μὲ ὠρισμένους ἀκριβεῖς ὁρισμούς, θὰ χρησιμεύσουν ὡς ὄπλο γιὰ νὰ παρακαμφθῇ ἡ νέα καὶ πιὸ σοβαρὴ αὐτὴ κρίση.

Πιὸ πάνω μιλήσαμε γιὰ τὰ μαθηματικὰ πρότυπα. Ἐνα κατάλληλα κατασκευασμένο πρότυπο ὑπῆρξε, ἕως τώρα, ἓνα ἰσχυρὸ ὄπλο γιὰ τὴ μαθηματικὴ ἔρευνα. Μὲ ἓνα τέτοιο πρότυπο ἀποδείχθηκε τόσο τὸ ἀνεξάρτητο ἐνὸς ἀξιώματος ἀπὸ ἄλλα, ὅσο καὶ τὸ συμβιβαστὸ γιὰ ἓνα σύστημα ἀπὸ ἀξιώματα. Ὡστόσο, ἓνα σύστημα ἀξιωμάτων δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ μιὰ πεπλεγμένη δομή. Ἀντίθετα, ἓνα πρότυπο ἀντιστοιχίζει ἐκπεφρασμένα κάτι στὰ ἀξιώματα· ἀποτελεῖ μιὰ, ὅπως λέμε, ἐρμηνεία τοῦ συστήματος ἀξιωμάτων. Τὸ σύστημα ἀξιωμάτων ZF (βλ. παράγρ. 16) ἡμπορεῖ νὰ ἐρμηνευθῇ μέσα σὲ μιὰ ἀπαριθμητὴ περιοχὴ μαθηματικῶν ἀντικειμένων, σύμφωνα μὲ ἓνα γνωστὸ θεώρημα τῶν Loewenheim (1878 - 1940) καὶ Skolem. Ἐτσι ἔχουμε ὅτι σήμερα φέρει τὴν ὀνομασίαν ἡ κανονικὸ πρότυπο⁴² (non-standard model), πού οὐσιαστικὰ ἀποκλίνει ἀπὸ ἓνα κανονικόν. Τυποποιημένα συστήματα ἀπὸ ἀξιώματα ἐνδέχεται νὰ ἔχουν μὴ κανονικὰ πρότυπα, ἐνῶ τέτοια συστήματα δὲν εἶναι πλήρη, σύμφωνα μὲ τὸ περίφημο θεώρημα τοῦ Goedel.

Στὴν ἔρευνα γιὰ τὴ θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν, ἡ μόρφωση προτύπων ἔπαιξε σημαντικὸ ρόλο. Ἐτσι, ἄλλωστε, ἀποδείχθηκε καὶ ἡ πρόταση τοῦ Cohen πού, στὴν οὐσία, λέει ὅτι ὁ πληθικὸς τοῦ συνεχοῦς δὲν ἡμπορεῖ νὰ καθορισθῇ ἀπὸ ἓνα (σύνηθες) σύστημα ἀξιωμάτων γιὰ τὴ Θεωρία τῶν Συνόλων.

22. Μὲ βάση τὸ θεώρημα τοῦ Goedel καὶ τὴν πρόταση τοῦ Cohen, εἴμαστε σὲ θέση νὰ γνωρίζουμε ὅτι, καὶ ἂν ἀκόμη προσλάβουμε τὴν (γενικευμένη) ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ὡς ἓνα νέο ἀξίωμα στὸ ὑπάρχον σύστημα ἀξιωμάτων, π.χ. στὸ ZF', πάλιν θὰ ἦταν δυνατόν νὰ βρεθῇ, μέσα στὴ θεωρία, πρόταση πού οὔτε αὐτὴ οὔτε ἡ ἄρνησή της νὰ ἀποδεικνύονται στὸ συμπληρωμένο ἀξιοματικὸ σύστημα. Βέβαια, τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ δὲν ἀποτελεῖ ὅπως εἴπαμε ἄμεση δικαίωση γιὰ τὸν δημιουργὸ τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, πού ἦταν πεπεισμένος γιὰ τὴν δυνατότητα ἀποδείξεως τῆς ὑποθέσεώς του

42. A. Fraenkel - Y. Bar Hillel, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam 1958, 289.

(τοῦ συνεχοῦς), καὶ ποὺ γιὰ τὴν ἀπόδειξη αὐτὴ ἀφιέρωσε ἓνα μεγάλο μέρος τῆς μαθηματικῆς του δραστηριότητος. Τὸ γεγονός, ὅμως, ὅτι κανένα πεπερασμένο σύστημα ἀπὸ ἀξιώματα δὲν εἶναι ἀρκετὰ εὐρὺ ὥστε νὰ περιλάβῃ τὴ Θεωρίαν τῶν Συνόλων, δείχνει πὼς οἱ δυνατότητες ποὺ ἡ θεωρία αὐτὴ κρύβει ξεφεύγουν, κατὰ κάποιον τρόπο, ἀπὸ κάθε τέτοια ἀξιωματικὴ δέσμευση.

23. Λίγα λόγια, τέλος, γιὰ τὴν σχέση μετὰ τοῦ μαθηματικοῦ συνεχοῦς, αὐτοῦ ποὺ ἀπετέλεσε τὸ ἀντικείμενο τῆς μελέτης μας, καὶ τῆς ἀντιστοιχίας φυσικῆς πραγματικότητος, ποὺ ἀπασχόλησε τοὺς Ἑλληνας φιλοσόφους. Ἦδη, στὴν παράγραφο 4, παρατηρήσαμε πὼς τὰ καθαρὰ Μαθηματικά δὲν εἶναι πιστὴ περιγραφή τοῦ φυσικοῦ κόσμου. Γιὰ τὴν τεκμηρίωση αὐτοῦ ἀρκεῖ νὰ σημειώσωμε πὼς βασικὲς ἔννοιες στὰ Μαθηματικά, ὅπως ἐκείνη τοῦ ἀπείρου, δὲν πραγματοποιοῦνται πουθενὰ στὴν Φύση. Ἀλλὰ καὶ ἔννοιες ποὺ δημιουργήθηκαν ἀπὸ τὴν ἐποπτεία τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου, στὶς ὁποῖες καταλέγομε καὶ τὴν ἔννοια τοῦ συνεχοῦς, εἶναι ἔννοιες ἰδεατές, μὲ δομὴ οὐσιαστικὰ διάφορη ἀπὸ τὴν κατασκευὴ ποὺ ἔχουν τὰ ἀντικείμενα τῆς ἐμπειρίας. Ὡς ἀπλὸ παράδειγμα ἔχομε ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ βροῦμε ὑλικά ἀντικείμενα δίχως ἑκταση, ἀντίστοιχα πρὸς τὰ σημεῖα τῆς Γεωμετρίας. Μὲ ποῖο τρόπο θὰ ἦταν λοιπὸν δυνατόν ἡ δομὴ τοῦ μαθηματικοῦ συνεχοῦς, ποὺ εἶναι κατάλληλο σύνολο ἀπὸ ἄπειρα τὸ πλῆθος μὴ ἑκτατὰ σημεῖα, νὰ ἔχῃ τὴν δομὴ τοῦ φυσικοῦ συνεχοῦς, ποὺ ἀντίθετα ἀποτελεῖται ἀπὸ πεπερασμένα τὸ πλῆθος ἑκτατὰ στοιχεῖα; Ἀκόμη καὶ ἡ ἀντιστοιχία μέσα σὲ μαθηματικὲς ἔννοιες καὶ ἀντιλήψεις τῆς ἀμέσου ἐπαισθήσεως, δὲν ἔμπορεῖ πάντοτε νὰ περιγράψῃ φυσικὰ φαινόμενα. Ἀλλιῶς θὰ ἔπρεπε, σὲ κάθε στοιχειῶδες «ἄτομο» μιᾶς λεπτῆς ὑλικῆς γραμμῆς (τεταμένου νήματος) νὰ μὴν ὑπάρχῃ οὔτε προηγούμενο οὔτε ἐπόμενό του, πρᾶγμα ποὺ στὴν ἐμπειρία δὲν συμβαίνει. Ἐπίσης, ἡ ὑλικὴ γραμμὴ ἢ τὸ χρονικὸ διάστημα θὰ ἔπρεπε νὰ ἔμπορουν νὰ τεμαχίζονται δίχως τέλος, πρᾶγμα ποὺ ἐπίσης δὲν συμβαίνει.

Ὡστόσο στὶς φυσικὲς ἐφαρμογὰς τῶν Μαθηματικῶν εἶναι σκόπιμον νὰ δεχώμεθα ἀμφιμονοσήμαντὴ τὴν ἀντιστοιχία μετὰ τῶν στοιχείων τοῦ μαθηματικοῦ καὶ τοῦ φυσικοῦ συνεχοῦς. Στὴν παραδοχὴ αὐτὴ βασίζεται, ἄλλωστε, ἡ ἐφαρμογὴ στὴν Φυσικὴ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας καὶ τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ. Ἀλλὰ καὶ ἡ κατὰ παραδοχὴν ἀμφιμονοσήμαντὴ αὐτὴ ἀντιστοιχία δὲν πρέπει νὰ ἐκλαμβάνεται ὡς μιὰ ἰσομορφία, ὑπὸ τὸ πνεῦμα καὶ τῆς διατηρήσεως σ' αὐτὴν τῆς σχέσεως τῆς διατάξεως. Ἐνῶ γιὰ τὰ Μαθηματικά, ὅπως εἶπαμε, δὲν ὑπάρχει τὸ ἀμέσως προηγούμενο ἢ ἐπόμενο σημείου, στὴν Φυσικὴ ἡ ἄμεση διαδοχὴ, π.χ. τῶν χρονικῶν στιγμῶν, εἶναι κάτι τὸ γενικὰ παραδεκτό.

Τὸ συμπέρασμα εἶναι, ὅτι τὸ μαθηματικὸ συνεχές εἶναι μιὰ καθαρὰ νοητικὴ ἔννοια δίχως ἄμεση φυσικὴ ἐφαρμογή. Ὑπὸ τὸ νόημα αὐτὸ πρέπει νὰ ἐξετάζεται καὶ ὁποιαδήποτε ἀνάλυση τῶν *παραδόξων* τοῦ Ζήνωνος, ποὺ ἔχουν ἄμεση σχέση μετὰ τὸ φυσικὸ συνεχές.

THE PROBLEM OF THE NATURE OF CONTINUITY

Summary.

It is well known that continuity has a primary importance for the Philosophy of Mathematics. That is why the investigation into the nature of the continuum has been the object of constant effort and trial for many scientists since antiquity. Although this concept is intuitively very clear and simple, its exact definition, without any intuitive elements, always constituted a very difficult problem. It seemed impossible to most ancient philosophers to analyse this notion into more elementary ones. Nor did others think continuity was a logical or mathematical idea, but rather a pure dogma.

As a matter of fact, Greek mathematicians succeeded in approaching the geometrical conception of the continuum through an arithmetical one, by means of the invention of incommensurable numbers. This greek theory could hardly be completed in two thousand of years. What recent mathematicians did, was a representation of the geometrical continuum merely. Thus, the class of all real numbers constituted the linear continuum of Geometry. Later on, by the invention of the set-theory an attempt was made to approach the continuum through the discrete. The method inaugurated in this way has had the intention to bridge the abyss existing between these two quite different concepts, i.e. the concept of continuity and that of discontinuity (discreteness). We have already noted that most of the Greek philosophers thought it appropriate to get continuity as their starting point, inasmuch as they considered continuity and not discontinuity to be the simpler concept.

In this paper, after a historical report of former debates concerning the problem of continuity, we intend to give the modern position on this problem on account of the new achievements of the set-theory and the aspects of the Intuitionistic School as well.

Athens

Philon Vassiliou